Deutsche Physik

in vier Bänden

Von

Philipp Lenard

in Heidelberg

Allen, die in wohlgegründeter Naturerkenntnis ihre geistige Ruhe suchen, zur Freude geschrieben.

Erster Band:

Einleitung und Mechanik

Mit 113 Abbildungen

Vierte, vermehrte Auflage.



J. F. Lehmanns Verlag / München-Berlin 1944

Druck von Dr. F. P. Datterer & Cie., Freising-München.
Printed in Germany.

Inhalt des ersten Bandes.

Bei den in allen vier Bänden zahlreichen, meist in Klammern gesetzten Hinweisen bedeutet:

M = Mechanik (Bd. I),
A = Akustik (Bd. II),
W = Wärmelehre (Bd. II),
O = Optik (Bd. III),
E = Elektrizitätslehre (Bde. III und IV).

Die Zahlen bedeuten stets Absatznummern.

Im Nachschlageverzeichnis (Bd. IV) der dritten Auflage sind für den vorliegenden Band die Seitenzahlen stellenweise um 1 zu erhöhen.

Einleitung.

1. Naturwissenschaft und Geisteswissenschaften. — Physik bedeutete ursprünglich und bedeutet im wesentlichen auch heute noch, ganz besonders in unserer Auffassung, Naturwissenschaft überhaupt und ganz allgemein.

Es ist das nach gebräuchlicher Einteilung der eine Teil des menschlichen Wissens; den anderen Teil bilden die Geisteswissenschaften.

Die Naturwissenschaft, die Physik, behandelt die gesamte Natur oder Welt, soweit sie unseren Sinnen zugänglich ist: Alles was ist und was beobachtbar ist, ist ihr Gegenstand. Es ist das viel — reicht bis zu den entferntesten Gestirnen —, aber offenbar ist es doch nicht alles, nicht die ganze Welt. Es gibt, wie unser Inneres uns lehrt, auch einen unseren Sinnen nicht zugänglichen Teil der Welt.

Wir nennen den den Sinnen zugänglichen Teil der Welt die materielle Welt oder Stoffwelt; den anderen Teil, von dem unser Inneres uns Kunde gibt, dessen Bestehen aber auch der Gebrauch der Sinne uns anzeigt, wenn wir die Lebewesen betrachten, nennen wir die Geisterwelt.

Unser Gegenstand ist somit die materielle Welt und alles, was in ihr geschieht; die Geisteswissenschaften dagegen bewegen sich in der Geisterwelt. Zu den Geisteswissenschaften zählen z. B. die historischen Wissenschaften, die Theologie, die sog. Philosophie, die Jurisprudenz.

Sehr verschieden ist die Tätigkeit des Naturforschers, der Naturwissenschaft aufbaut, von der eines Vertreters der Geisteswissenschaften. Der Naturforscher baut gänzlich auf den Gebrauch seiner Sinne; er benutzte diese dazu, täglich immer weitere, neue Kunde aus der materiellen Welt zu erhalten. Er wendet dabei seine Sinne meist dem unbelebten Teil der materiellen Welt zu, da dieser Teil ihm am leichtesten die einfachen Gesetzmäßigkeiten des Verhaltens der gesamten materiellen Welt gezeigt hat und noch zeigt. Der belebte Teil ist sehr auffallend verschieden vom unbelebten; er ist von viel verwickelterem Verhalten, und dieser, der Sinneswahrnehmung zugängliche Unterschied ist es, der auch von der Seite der Sinne her das Bestehen einer außermateriellen Welt anzeigt[1]), offenbar derselben „Geisterwelt", an deren Wirken unser eigenes Inneres uns mahnt. Der belebte Teil der materiellen Welt wird von der Geisterwelt beeinflußt, was beim unbelebten Teil nicht merklich der Fall ist. Die belebten Wesen bieten Erscheinungen, in welchen Geisterwelt und materielle Welt zusammenwirken. Eben in diesem Zusammenwirken besteht das Leben; Materie, die Geist (Seele) hat, nennen wir lebend.

Bei den Geisteswissenschaften kommt das Wesentliche nicht von außen her, durch die Eingangstore der Sinne, zum Forscher, sondern von innen heraus, aus seinem eigenen Geist. Von der Außenwelt beschäftigt den Vertreter der Geisteswissenschaften am meisten die belebte, beseelte Natur, und er benutzt seine Sinne

[1]) Wer darüber noch nicht klar ist, möge als Beispiel M 284 sehen.

im wesentlichen nur zum Verkehr mit anderen an Materie gebundenen Geistern, zu allermeist mit anderen Menschen.

Ergebnis der Tätigkeit in den Geisteswissenschaften sollte jeweils neue Kunde aus der Geisterwelt sein. Doch kommt solche Kunde uns in Wirklichkeit nur selten zu, und sie kommt nicht von den fachmäßigen Vertretern der Geisteswissenschaften. Die großen Religionsstifter, deren kaum einer alle 1000 Jahre auf Erden erscheint, sind Bringer solcher Kunde; auch wahre Künstler, Bildner und Dichter in Wort und in Tönen, wahre Staatslenker, deren vielleicht je einer alle 100 Jahre uns gegeben wird, wirken dahin. Die Vertreter der Geisteswissenschaften an den Universitäten sollten diese Kunde wenigstens verwalten, aber nicht so, daß das Vorhandene oder aus der Vergangenheit wieder Auszugrabende bloß mit Gelehrtheit hin und her geworfen wird, wobei das Beste meist unbemerkt bleibt, sondern so, daß damit der Geist des Volkes gespeist, genährt, das Volk also erzogen wird. Dies ist offenbar schon in langen, geschichtlichen Zeiträumen vollkommen verfehlt worden, wie es im Erfolg der so oft wiedergekehrte Tiefstand deutschen Geistes zeigte. Man hat es nicht verstanden, dem deutschen Geist für ihn taugliche Nahrung zu bieten, weil man noch nicht einmal der grundlegendsten Unterscheidungen in der Geisterwelt genügend sich bewußt geworden ist, wie: daß jedes Lebewesen seinen eigenen, besonderen Geist hat — den Teil der Gesamt-Geisterwelt, den sein Körper festzuhalten vermag —, daß die größten Verschiedenheiten unter den Geistern gruppenweise sich finden je nach Körperbeschaffenheit, wie sie durch die körperliche Abstammung gegeben ist. Man hat nicht genügend klar erfaßt, daß, so wie Flöhe eine andere Geistesbeschaffenheit haben als Elephanten, auch die Geister der verschiedenen Menschenrassen und Völkergruppen voneinander verschieden sind. Man hat den Geist des deutschen Volkes durch Jahrhunderte mit „Menschengeist" überhaupt zu speisen versucht, als ließen sich Geister beliebig zusammenstoppeln, wie wenn Flöhe von Elephanten — oder umgekehrt — tauglich unterrichtet werden könnten. So konnten die Geisteswissenschaften den Geist des deutschen Volkes nicht mehren, ja nicht einmal bei der Vollwertigkeit halten, die ohne diese Wissenschaften im Schoße der Natur schon erreicht war. —

2. Abzweigungen der Naturwissenschaft. — Wir wenden uns nun ganz zur Naturwissenschaft, um nur mehr gelegentlich einen Blick auf die Geisterwelt zu werfen, wo sich das dem Naturforscher darbietet.

Vorweg müssen wir bemerken, daß die gesamte Kenntnis von der materiellen Welt einen zu großen Umfang angenommen hat, als daß ein einzelner Menschenkopf sie mit allen Einzelheiten aufzunehmen fähig sein könnte. Dies ist der Anlaß dafür geworden, daß im Laufe der Entwickelung Zweigwissenschaften von der Physik sich abgespalten haben, die nun als gesonderte Studienfächer dastehen. So die Astronomie, die Mineralogie und Geologie, die Botanik, Zoologie, Anatomie, Physiologie, Biologie, wobei die letzteren Wissenschaften die besondere Untersuchung belebter Materie betreiben, ohne aber mit dem Geist sich zu beschäftigen, dessen Ankoppelung an die Materie deren Belebt-sein bedingt; weiter die Chemie. Alle diese Wissenschaften finden sich mit dem nicht rein beschreibenden Teile ihres Inhalts, mit den grundlegenden Erkenntnissen, die sie benutzen und die stets die gesamte materielle Welt betreffen, auch heute noch mitten in der Physik. Nur die Fülle ihres besonderen Gedächtnisstoffes, auch

Besonderheiten der Arbeitsweise und der Hilfsmittel — äußerliche Dinge also — haben die Abzweigung verursacht.

Neuere, noch mehr ins Einzelne gehende Abzweigungen sind allerdings durch ganz sachfremde Umstände hervorgerufen. Besonders das Drängen neu herangewachsener Akademiker nach neuen und möglichst selbständigen Lehrstühlen wirkte hierbei mit, aber auch die Bequemlichkeit derjenigen, denen die Vertretung eines ursprünglich ungeteilten Faches oblag und die es ohne zwingenden Grund oft gerne sahen, wenn ihnen Teile des Faches abgenommen wurden. Solche innerlich unbegründete Abzweigungen schädigen den Kulturwert der Wissenschaft, nämlich ihren Wert für die Höherentwickelung des Menschengeistes. Denn diese Höherentwickelung verlangt Einheit, Einfachheit, Übersichtlichkeit, nicht Zerstückelung des Wissens. Eine ungerechtfertigte Abzweigung bildet beispielsweise die sogenannte „Physikalische Chemie", deren Vertreter grundlegend nichts anderes zu lehren haben, als was Physik und Chemie ohnehin zu bieten hätten. Wiederholte Abzweigungen dieser Art führten zum heute in allen Wissenschaften wuchernden Spezialistentum, das durch Ertötung von Überblick, durch Erstickung des in zeitweiliger freier Unwissenheit am besten gedeihenden Forschergeistes und fruchtbringenden Menschengeistes überhaupt, großen Schaden an den Universitäten stiftet. Es kommt so zur Bevorzugung derjenigen minder Begabten, die eines großen Überblicks unfähig geboren sind und die daher gern in der Häufung von einseitigem Lernstoff das Wesen der Wissenschaft sehen.

3. **Chemie und Physik.** — Als ein Beispiel, das zeigt, wie die Abtrennung der Zweigwissenschaften von der Physik auch bei guter Begründung doch nur rein äußerlich gegeben, nicht im Wesen der Sache liegend ist, sei die Abgrenzung der Chemie gegen die Physik betrachtet.

Man wollte zu einer Zeit definieren: Ein Vorgang gehöre in das Gebiet der Physik, wenn nach seinem Ablauf die Eigenschaften der von ihm betroffenen Körper unverändert erhalten sich wiederfinden, in das Gebiet der Chemie dagegen, wenn Abänderung der Eigenschaften erfolgt ist. Das Erglühen eines Platindrahtes in der Bunsenflamme wäre nach dieser Definition eine in die Physik gehörige Erscheinung, weil der Draht danach seine bekannten metallischen Eigenschaften ungeändert erhalten zeigt. Das Verbrennen eines Magnesiumdrahtes dagegen würde in die Chemie verwiesen, weil man danach seine Eigenschaften gänzlich verändert findet; er ist ein weißes Pulver geworden. Nun beachte man aber, daß man dieses weiße Pulver (das der Chemiker Magnesiumoxyd nennt) einem neuen Vorgang unterwerfen kann (einem Reduktionsvorgang, wie ihn der Chemiker nennt), nach dessen Ablauf das ursprüngliche Metall, wie es war, wieder zum Vorschein kommt. Auch diesen neuen Vorgang müßte man nach Definition „chemisch" benennen, weil er die Eigenschaften wieder ganz geändert hat. Nehmen wir aber beide „chemischen" Vorgänge zusammen, so haben wir doch einen „physikalischen" Vorgang, weil das Metall unverändert wieder da ist. Die Definition, welche Chemie und Physik als wesentlich voneinander verschieden trennen sollte, versagt also. So ist es auch mit der Abtrennung der anderen Zweigwissenschaften.

Wollen wir eine treffende Definition der Chemie geben, so müßten wir — später zu behandelnder Kenntnis vorgreifend — sie als „die besondere Physik der Atomgruppierungen" bezeichnen.

4. Die Teile der Physik. — Was wir in allem Folgendem als Physik behandeln wollen, ist demnach allgemein gültiges Wissen von der materiellen Natur überhaupt und damit auch Grundlage all der abgezweigten Naturwissenschaften. Die hervorragendsten Vertreter aller dieser Wissenschaften waren stets auch Mehrer der in der Physik zusammengefaßten, für die Naturkenntnis im großen grundlegenden Einsichten.

Um zu einer Unterteilung dieses umfassenden Wissens zu kommen, benützen wir folgende, schon sehr alte Gruppierung:

1. Mechanik,
2. Akustik oder Lehre vom Schall,
3. Lehre von der Wärme,
4. Optik oder Lehre vom Licht,
5. Lehre von der Elektrizität und den magnetischen Erscheinungen.

Diese Einteilung ist von den Sinnen des Menschen genommen: In der ersten Gruppe handelt es sich um Bewegungen der schon durch den Tastsinn verfolgbaren Körper; für die zweite Gruppe haben wir den Gehörsinn; für die dritte den heiß und kalt unterscheidenden Wärmesinn; für die vierte das Auge; in die fünfte Gruppe endlich gehören Erscheinungen, für die uns ein besonderer Sinn fehlt, die wir also auf Umwegen mittels der anderen Sinne ergründen müssen.

Eine solche Einteilung nach den Sinnen kann gar nicht mit Recht zurückgewiesen werden; denn eben unsere Sinnesorgane sind es, auf die wir gänzlich angewiesen sind als auf die alleinigen Eingangstore aller naturwissenschaftlichen Kenntnis. Wie hoch wir auch die geläuterte, von den Zufälligkeiten ihres Eingangs in unser Bewußtsein befreite Erkenntnis zu schätzen haben: zuletzt ist doch immer wieder die Kontrolle durch die Sinne maßgebend, und je enger wir uns an das sinnlich Wahrnehmbare halten, um so besser steht es mit dem Bewußtsein von der Sicherheit der naturwissenschaftlichen Erkenntnis.

5. Materie und Äther. — Man meinte allerdings früher, in nun schon sehr zurückliegenden Zeiten, in dieser Einteilung etwas Tiefergehendes zu haben; man hielt Schall, Wärme, Licht, Elektrizität, Magnetismus für eben so viele besondere Stoffe, die, im Gegensatz zu den in der Mechanik zu behandelnden greifbaren Körpern nicht greifbar, nebenbei auch nicht wägbar sein sollten, „Imponderabilien" genannt, welche die betreffenden Erscheinungen hervorbringen sollten. Diese Vermutung hat sich in solchem Umfange aber nicht bestätigt: so vielerlei grundverschiedene Stoffarten gibt es gar nicht in der Natur. Wohl aber ist mit dem Fortschreiten der Erkenntnis zunächst *zweierlei Stoff* als Träger der Erscheinungen der materiellen Welt merklich geworden: *Materie und Äther*.

Materie sind all die greifbaren Körper um uns, die festen, flüssigen und gasförmigen; auch unser eigener Körper ist aus Materie gebaut. Äther ist überall; frei oder nahezu frei von Materie erfüllt er die großen, weiten Himmelsräume bis zu den fernsten sichtbaren Gestirnen.

Materie und Äther haben unzweifelhafte Beziehungen zueinander; besonders kommen wir dazu, jedem Stück Materie auch eine gewisse Menge Äther zuzuordnen. Doch können Äther und Materie vorläufig auch getrennt voneinander behandelt werden. Man kann sogar die ganze Physik danach in zwei Hauptteile

trennen: Physik der Materie und Physik des Äthers. Die Physik der Materie umfaßt die drei ersten Gruppen unserer Einteilung, die Physik des Äthers die beiden letzten Gruppen.

Wir bringen die Physik der Materie in Bd. I und II, die Physik des Äthers in Bd. III und IV dieses Werkes.

Die Physik der Materie, als der den Sinnen unmittelbar zugängliche Teil, hat die ältere Entwicklung voraus; wir werden daher mit ihr beginnen. Dabei werden die allgemeinen Eigenschaften der Materie voranzustellen sein. Den Äther lassen wir von selbst sich melden, was ausgiebig durch die Erscheinungen des Lichts geschieht; nur zu besserer Übersicht wird einiges von ihm gelegentlich schon vorher erwähnt. Wir werden es vermeiden, ihm mehr zuzuschreiben, als was die Benützung der Sinne in einfachster Auffassung schon gelehrt hat. Es ist ein Übergang von der materiellen Welt zur Geisterwelt, den der Äther in seinen schon einigermaßen erkannten Eigenschaften zeigt (18, O 4, E 594).

Als über der Zweiteilung „Materie und Äther" stehend zeigt sich die schon in der Physik der Materie einzuführende Energie; ihre umfassende Bedeutung (M 157) wird allerdings erst bei Zusammenfassung aller bisherigen Kenntnis, am Schlusse der Physik des Äthers nachweisbar.

Hinzuzufügen ist in dieser Einleitung noch einiges über Vorgehen und Leistung der Naturforschung (6—19).

6. Beobachtung und Versuch; Erfahrung. — Das Ziel der Naturforschung ist das Begreifen, Verstehen der Vorgänge um uns, — man sagt wohl auch: die Ergründung des Wesens der Dinge oder der Natur der Dinge. Dazu ist vor allem eingehende Beobachtung der Vorgänge erforderlich, Anwendung der Sinnesorgane auf dieselben, um sie vorerst in Sinneseindrücken geistig zu erfassen.

Doch genügt es nicht, die Vorgänge nur zu nehmen, wie sie von selber sich bieten und wären sie auch so neuartig, daß ihre Wahrnehmung eine Entdeckung bedeutet. Sondern der Beobachter muß auch „experimentieren", d. h. er muß künstlich abgeänderte Bedingungen schaffen, um zu sehen, wie der Ablauf der Vorgänge dann sich gestaltet. Diese Bedingungen müssen aber, wenn der Versuch, das „Experiment", dem Verstehen gesichert dienen soll, wohl überlegt sein, so daß entscheidende, nicht unsicher und willkürlich zu deutende Ergebnisse erfolgen; es dürfen nicht beliebige, unkontrollierte Dinge mitwirken: der Versuch muß „rein" sein. Versuche müssen immer Fragen an die Natur sein, und man erhält klare Antworten nur auf klare Fragen. Wir werden vielfach wiederholt Beispiele für die Wichtigkeit reiner Versuche sehen.[1])

Durch Beobachtung und Versuch sammelt der Naturforscher seine Erfahrung.

Beobachtungen, die gesichertem, nachprüfbarem Verstehen dienen sollen, müssen aber auch maßmäßig, quantitativ durchgeführt sein, so daß ihre Ergebnisse in Zahlen festzulegen sind; sie müssen messend sein, was aber freilich nur bei genau wiederholbaren Erscheinungen und bei reinen Versuchen Wert hat. Hierzu und über den Weg zum Verstehen ist noch viel im einzelnen zu sagen.

Entgegenzutreten ist hier wohl vorweg der oft geäußerten Meinung von der „genialen Intuition", die Naturerkenntnis ohne beobachtende Forschung

---

[1]) Als erstes Beispiel sehe man M 119. Weitere Beispiele im Nachschlageverzeichnis, Bd. IV.

liefere. Solche Meinung beruht auf gänzlicher Unkenntnis der tatsächlichen Entwickelung des Wissens von der Natur. Der Mensch kommt völlig unwissend zur Welt; er weiß nicht einmal etwas von seinem eigenen Körper, z. B. nicht, daß er ein Herz hat. Erfährt er das aus gemachten Beobachtungen an toten Menschen, so weiß er immer noch nicht, wozu das Herz ist. Harvey hat erst 1628, über viele geäußerte unzutreffende Vermutungen hinweg, durch Beobachtung die Frage beantwortet, indem er sich enschloß, Tiere aufzuschneiden, ehe sie tot waren. Die aus diesem Beispiel ersichtliche Unmöglichkeit, Tatsachen der Natur mittelst genialer Intuition aus den Fingern zu saugen, beruhte aber keineswegs etwa auf damaliger geringer geistiger Entwicklung der Menschen: der Kölner Dom war schon 1250 im Bau! Werke der Kunst aus dem eigenen Geist schaffen, Dichten, auch Vorhandenes neuartig zusammenfügen, „erfinden", ist aber etwas anderes als entdecken. Entdecken, so wie auch gegebene Tatsächlichkeiten erforschen, kann nur der Beobachter. Welche geistigen Eigenschaften im weiteren, bis zum gesicherten Verstehen noch nötig sind, geht aus dem noch Folgenden hervor (13, 16).

Wer aber noch immer meinen will, daß der Geist der großen Forscher darauf eingerichtet war, unbekannte Naturtatsachen mit „genialer Intuition" vorauszusehen, der möge bedenken — sofern seine Kenntnisse schon ausreichen —, daß weder Newton noch Huygens die einfache und aufschlußreiche Tatsache der Polarisation des Lichtes durch Spiegelung voraussahen, obgleich sie mit damaligen Mitteln sehr leicht erkennbar zu machen gewesen wäre, und obgleich diese Forscher über polarisiertes Licht — das sie vom Doppelspat her unter den Händen hatten — viel Gedanken sich machten. Er möge auch bedenken, daß Bunsen, der aufs Feinste Luft und alle Gase analysierte, doch das Argon, den alltäglichen Bestandteil der Luft, nicht entdeckte, obgleich schon Priestley Zeichen für die Uneinheitlichkeit des Luftstickstoffs gezeigt hatte. Oder er möge bedenken, auf wie langen Wegen mit Irrgängen Galilei seine Fallgesetze fand (vgl. M 53) und nicht minder Ohm sein elektrisches Gesetz, obgleich es nachher sichtbar war, daß diese Gesetze noch einfacher kaum hätten sein können.

7. Das Maßmäßige, Quantitative ist charakteristisch für die Naturwissenschaft, und darin besteht auch ihre Stärke, die am greifbarsten in den Anwendungen, nicht minder groß aber in feststehenden Erkenntnissen über die Beschaffenheit der Welt sich zeigt, im Gegensatz zu den Geisteswissenschaften, denen das Quantitative in den Hauptdingen ganz versagt ist. Der Naturforscher kann bei allem, was er genügend beobachtet hat, nicht nur ein „Mehr" oder „Weniger" angeben, sondern ein „um soundsoviel" mehr oder „soundsoviel mal" mehr oder weniger. Dies können die Geisteswissenschaften nicht. So kann z. B. wohl etwa behauptet werden, der Geist Newtons war dem Geist des Aristoteles überlegen, — vergeblich, ja sogar sinnlos wäre aber die Frage: „um wieviel oder wieviel mal überlegen?". Dieses Versagen des Quantitativen in den Geisteswissenschaften hat seinen Grund, wie das Beispiel zeigt, in der außerordentlich viel verwickelteren, der Zerlegung durch unsere Anschauung entzogenen Beschaffenheit der Gegenstände der Geisterwelt im Vergleich zu den Gegenständen der materiellen Welt. Man kann erstere nicht messen; ihre über unser volles Verstehen erhabene Beschaffenheit entzieht sie solchem, für sie allzu rohem Beginnen.

8. Mathematik. — Messen beruht, wie wir sehen werden, auf Zählen, und das Letztere ist überall möglich, wo getrennt erkennbare Dinge irgendwelcher Art vorliegen. Die Wissenschaft vom Zählen und von allem was darauf und auf die Eigenschaften der Zahlen allein sich gründet, heißt Mathematik. Da der Menschengeist (wohl aller Rassen) des Zählens fähig ist, und insofern er alles was darauf allein sich baut aus sich selbst, ohne Hinzuziehung äußerer Erfahrung entwickeln kann, ist die Mathematik eine Geisteswissenschaft. Die Anregung zu ihrer Entwickelung und mindestens eine starke Stütze dazu hat sie aber durch die Naturforschung erhalten, wovon die Erfindung der Infinitesimalrechnung wohl das hervorragendste Beispiel ist, und insofern war Mathematik im Anfang fast ein Teil der Naturwissenschaft, und jedenfalls war sie wegen des quantitativen Bedürfnisses der Letzteren eine Hilfswissenschaft derselben. Wegen ihres festen und klaren inneren Baues, der jederzeit die Sicherheit gibt, daß sie nur mit den Denknotwendigkeiten des arischen Menschengeistes arbeitet und bei richtiger und ehrlicher Anwendung jede Willkürlichkeit ausschaltet, so daß verwickeltste Schlüsse ohne jede Gefährdung der Sicherheit bewältigt werden können, war sie mit Recht auch die „königliche Hilfe" der Naturforschung zu nennen. Arier haben sie zu diesen hohen Leistungen entwickelt, von Pythagoras, Euklid und Archimedes an bis Newton, Leibniz und Gauß. Allmählich, wohl etwa von Gauß' Zeit an und verbunden mit dem Eindringen der Juden in maßgebende wissenschaftliche Stellungen, hat sie aber in dauernd gesteigertem Maße die Fühlung mit der Naturforschung verloren zugunsten einer von der Außenwelt abgetrennten, nur in den Köpfen der Mathematiker sich abspielenden Entwickelung, und so ist diese Wissenschaft vom Quantitativen ganz Geisteswissenschaft geworden. Da die Rolle des Quantitativen in der Geisterwelt aber nur eine untergeordnete ist (7), ist die neuere Mathematik wohl als die untergeordnetste Geisteswissenschaft zu bezeichnen. Sie bearbeitet das im Menschengeist, was von ihm übrig bleibt, wenn man alle seine höheren und höchsten, dem Quantitativen gänzlich fernstehenden Fähigkeiten beiseite läßt. Es bleibt dann die Fähigkeit zu zählen übrig und was daran sich knüpft. Es ist gewiß nicht gut, dieser Geisteswissenschaft mit allen ihren neuesten Verzweigungen einen breiten Raum in den Schulen zu überlassen. Mathematische Grundkenntnisse, wie sie in den Hauptteilen des vorliegenden Werkes in Gebrauch kommen, mit Einblick in mathematisches Denken, genügen vollkommen zur Anbahnung etwaiger weitergehender Anwendungen der Mathematik fürs spätere Leben. So einfache Kenntnisse genügen auch, um die zu gediegener Geistesausbildung erforderliche Überzeugung vom umfassenden Walten der Naturgesetze auch in den Fällen zu erlangen, wo unmittelbare Einsicht nicht möglich ist, so z. B. die Überzeugung, daß die gesicherte Vorausberechnung der Planetenbewegungen aus Newtons Gravitationsgesetz ein besonderer Beweis für die genaue und umfassende Gültigkeit dieses Gesetzes ist (vgl. M 211).

9. Vorstellungen, Bilder, Begriffe. — Das Verstehen, Begreifen der beobachteten, zunächst nur in Sinneseindrücken uns nahe gekommenen Wirklichkeit, erfolgt durch Hinzuerfinden und Bereitmachen von Gebilden unseres eigenen Geistes, die mit der äußeren Wirklichkeit so zusammenhängen, daß wir mit dieser Wirklichkeit im Geiste und mit den Hilfsmitteln des Geistes arbeiten, mit

ihr denken können. Man mag diese, der beobachteten Natur angepaßten Geistesgebilde „Vorstellungen" oder „Bilder" nennen, die wir uns von den Dingen der Außenwelt machen; wichtig ist es, daß sie zur erforderlichen quantitativen Behandlung geeignet sein müssen, wozu auch völlige Bestimmtheit zu erstreben ist, die dann auch Festlegung in Wortbeschreibung und damit Mitteilung an andere erlaubt. Es ist dann der Name „Begriffe" wohl am passendsten für diese Hilfsmittel des Verstehens der Natur. Man begreift eine Erscheinung, einen Vorgang nur, wenn man die dazu passenden Begriffe besitzt. Jeder in der Naturforschung bewährte Begriff hat feste „Definition" — Begriffsbestimmung —, die derjenige, der den Begriff in brauchbarer Weise in seinem Geiste besitzt, jederzeit „aus dem Kopfe" in Worten zu geben imstande ist[1]).

10. Naturgesetze. — Damit die Vorstellungen, die Begriffe oder Bilder stets treffend der äußeren Wirklichkeit folgen bei allen Veränderungen dieser Wirklichkeit, welche die Erscheinungen ausmachen, müssen dem Verhalten der Vorstellungen bestimmte Gesetze gegeben sein; dadurch erst ist die Brauchbarkeit der Vorstellungen gesichert. So wie die Vorstellungen, müssen auch die Gesetze der beobachtbaren Natur angepaßt und an dieser erprobt sein; sie heißen daher — weil so der Natur entnommen — mit Recht Naturgesetze.

Durch passende Definition der Begriffe sichern wir die wirklichkeitsgetreue Beschaffenheit unserer Vorstellungen; durch passende Gesetze ihr wirklichkeitsgetreues Verhalten. Über den Weg zu diesen Anpassungen wird noch einiges zu sagen sein (13).

Die Vorstellungen oder Begriffe mit den zugehörigen Naturgesetzen machen unseren durch die Erforschung der Welt gewonnenen geistigen Besitz von der Welt aus.

11. Naturgesetze stets einfach. — So wie die Begriffe sind auch die Gesetze von quantitativer Art; sie sind quantitative Beziehungen zwischen Begriffen und dadurch auch zwischen den durch die Begriffe dargestellten Dingen der Außenwelt. Die Gesetze können daher stets in mathematischer Form, d. i. durch Gleichungen dargestellt werden. Das Arbeiten mit den Begriffen kann dann in Gestalt mathematischer Arbeit an den Gleichungen vor sich gehen. Doch genügen für alles Grundlegende die einfachsten mathematischen Operationen; denn die Naturgesetze sind stets von sehr einfacher Beschaffenheit; zu allermeist sind es Proportionalitäten oder einfache Potenz-Zusammenhänge. Denn der Sinn aller wohlerprobten Naturgesetze ist einfach; sie können daher nicht nur in Gleichungen, sondern stets auch leicht in gewöhnliche Worte gefaßt werden. Alle wohlgesicherte Naturkenntnis kann ohne nennenswerten mathematischen Aufwand dargestellt werden. Der gesamte Inhalt dieses Werkes wird das zeigen.

Die Einfachheit stellt sich stets von selber ein, sobald nur die zu den Naturvorgängen erprobt passenden Begriffe aufgefunden sind.

Die Einfachheit der Gesetze, mit deren Hilfe unser Geist die Natur begreift, zeigt eine vorgegebene umfassende Übereinstimmung unseres eigenen Geistes mit der Gesamtwelt an (16).

---

[1]) Es ist naheliegend zu denken, daß der Geist die Vorstellungen, Bilder, Begriffe mittels der Atome der Gehirnzellen festhält.

12. „Theoretische" oder „mathematische Physik". — Kommt es nur auf das Verstehen an, so ist demnach Aufwand besonderer mathematischer Kunst nie vonnöten. Wohl aber muß Mathematik notwendigerweise ausgiebig zu Hilfe kommen, wenn die einfachen Gesetze auf verwickelte Fälle anzuwenden sind.

Ebenso ist mathematische Kunst auch unentbehrlich, wenn noch unverstandene Naturvorgänge, deren Gesetze erst ergründet werden sollen, unter Bedingungen ablaufen, die vom Forscher nicht beliebig so gewählt werden können, daß einfache Fälle entstehen, die das Gesetz bei richtig gefaßten Begriffen unmittelbar ersehen ließen. Dies ist der Grund, warum Newton, als er das Kraft-Gesetz für die Bewegungen der Himmelskörper suchte, an deren äußeren Bedingungen nichts abzuändern war, nicht ohne besondere mathematische Kunst auskommen konnte. Ebenso ist aber auch der Grund ersichtlich, warum Guericke oder Faraday dieser Kunst gar nicht bedurften: weil sie Vorgänge entdeckten und erforschten, mit denen sie experimentieren konnten, d. h. die sie unter beliebig, auch beliebig einfach wählbaren äußeren Bedingungen im Laboratorium ablaufen lassen konnten.

Die „theoretische" oder „mathematische" Physik stellt sich die Aufgabe, alle Rechnungen vorzubringen, die mit Naturvorgängen verbunden werden können. Davon ist allerdings — wie bemerkt — für Natur-Verstehen nur sehr wenig erforderlich; das meiste ist mathematische Übungsarbeit, die sonst nicht viel für den Geist bringt und oft das Wesentliche nur verdeckt. Einige große Gedankengebäude ragen da allein hervor, die umfassend nur in der Sprache der Mathematik dargestellt werden können, wenn auch zur Zusammenfassung ihres Sinnes wieder einfache Worte genügen; wir bringen sie neben kleineren Beispielen charakteristischer Rechnungs-Anwendung in den „Anhängen" des I., II. und IV. Bandes dieses Werkes, wobei wir stets das Mitdenken vom vollständigen Mitrechnen abtrennen.

Man sieht, daß „theoretische Physik" nicht etwa ein besonderer Teil der Physik ist. Nur geistige Beschränktheit will Trennungen machen, und der besonders neuerdings getriebene Mißbrauch mit Theorien (s. 14) rechtfertigt am allerwenigsten die Errichtung besonderer Lehrstühle für „theoretische Physik".

13. Ausbildung der Begriffe; Auffindung und Sicherung der Gesetze. — Wird nach der Art gefragt, wie die Vorstellungen, Begriffe und Gesetze gefunden wurden, die das Verstehen der Naturvorgänge ermöglichen, so kann nur die Geschichte der Naturforschung die treffende Antwort geben; sie lautet: Der Weg zum Verstehen war stets Probieren, nämlich probeweises Erdenken von Vorstellungen, Begriffen, Gesetzen und Abänderung dieser Geistesgebilde unter fortgesetzter Vergleichung mit der Erfahrung, solange bis die Übereinstimmung befriedigen kann. Vorausgehen muß immer die Sammlung von Erfahrung über die noch unverstandenen Vorgänge (6); erst dann können mit Erfolg probeweise Vorstellungen und vermutete Gesetze den Geist des Forschers beschäftigen; fortgesetzte Vergleichungen mit der Wirklichkeit müssen ihn aber um so öfter noch zurechtweisen, je neuer der Gegenstand ist.

Sehr bemerkenswert ist es, daß der Weg zum Verstehen manchmal mittels schon älterer, an sich unscheinbarer, angesammelter Erfahrung gefunden werden konnte. Es waren dann in solchen Fällen zunächst nur mehr „Gedanken-

versuche" ohne Anwendung der Sinnesorgane erforderlich, um zu treffenden Begriffen und Gesetzen zu gelangen, die dann freilich immer noch weiterer Erfahrungs-Kontrolle bedurften. Nicht wenige wichtige Naturgesetze sind mittels Gedankenversuchs gefunden oder gesichert worden[1]).

Das oft verständnislos gebrauchte Wort vom „genialen Einfall" verwischt die geschilderte tatsächliche Entstehungsweise der Naturerkenntnis; es übersieht die Mühen des kundigen Beobachters sowohl, als die des gewissenhaften Denkers (vgl. 6 und 16). Der letzte, treffende Einfall nach Überwindung aller dieser Mühen ist meist etwas sehr Einfaches; er ist das Ergebnis dieser vorausgegangenen Mühen, die dem Unkundigen verborgen bleiben.

Wer also forschend Gott in der Natur näherkommen will, der hat wohl, neben angeborenem folgerichtigem Denken und ererbtem Entzücken an der Versenkung in beobachtbare Wirklichkeiten mit dem unbändigen Drang nach Verstehen derselben, unermüdlichen Fleiß nötig, auch draufgängerischen Unternehmungsgeist, dazu die Einbildungskraft von zehn Dichtern, noch viel mehr aber grenzenlose Bescheidenheit dem großen Unbekannten gegenüber, dem allein er selbstlos mit Treue ergeben dienen will.

14. Hypothese und Theorie. — Das Fortschreiten auf dem Wege über noch zu prüfende Vermutungen zu bewährter Erkenntnis war in den Zeiten gediegenster Naturforschung oft langsam und stockend — wenn genügend überzeugende Prüfungsmöglichkeiten der Vermutungen fehlten —; es blieben dann die Vermutungen unter dem Namen „Hypothesen" mit Zweifeln behaftet stehen. Auch heute kann das an Stellen, die dem Verstehen besondere Schwierigkeiten bieten, nicht anders sein. Erst wenn nach Hinzukommen genügend vermehrter Erfahrung keine Zweifel an der Übereinstimmung mit der Wirklichkeit mehr angebracht sind, wird das Ergebnis zu Recht „Theorie" genannt.

Bloße Vermutungen, Einfälle ohne jedes Hinzubringen neuer Erfahrung haben um so weniger Wert, je leichter sie hinzuwerfen sind. Der Name Theorie wird oft mißbraucht.

Aber selbst wenn umfassende experimentelle Ergebnisse zu einer mit Recht geltenden Theorie zusammengefaßt sind, kommt es leicht zu Mißbrauch, indem man die Unbestimmtheit der Grenzen des Erkannten übersieht und enge mathematische Formulierungen an Stelle des vollen Denkens mit der Natur, nach allem über ihr Verhalten Bekannten, treten läßt, wie es in Lehrbüchern über „theoretische Physik" geschieht. Dies führt abseits von fortschreitender Erkenntnis der Wirklichkeit[2]). Auch die wertvollste Theorie kann immer nur einen Teil des Naturgeschehens umfassen.

---

[1]) Ein erstes Beispiel zeigt M 85. Weitere Beispiele findet man im Nachschlageverzeichnis, Bd. IV. Zu warnen ist vor unerlaubten (betrügerischen) Gedankenversuchen, wie in M 86 erläutert.

[2]) Zwei erläuternde Beispiele:

Fouriers „Théorie analytique de la chaleur" (1822) war reich an wichtigen, der Naturforschung dienlichen mathematischen Leistungen und dadurch sehr allgemein förderlich. Es war aber von den Nachfolgern verfehlt, zu denken, daß damit eine Stofftheorie der Wärme, wonach diese überall sich so verhielte, wie bei der Wärmeleitung, gesichert sei und daß man Graf Rumfords sowie sonstige Ergebnisse der Beobachtung übersehen dürfe. Carnots Bedenken in dieser Hinsicht (1824) blieben unbeachtet, und noch 1842 und später stand man J. R. Mayers gründlicher Aufklärung aus umfassender Naturkenntnis großenteils verständnislos gegenüber. So war es hinderlich, daß man mehr mit vorhandener Theorie als mit der Natur denken wollte. „Theorie der

15. Die „exakten Beweise" der Naturgesetze. — Oft findet man hervorgehoben, daß Naturerkenntnisse erst durch „exakten, mathematischen" Beweis ihren vollen Wert erhalten. Wer so denkt, kennt Naturforschung nur von außen und steht gewöhnlich auch der Mathematik fern. Er weiß nicht, daß die Ergebnisse mathematischer Ableitungen keineswegs so richtig sind wie die gebrauchte Mathematik, sondern nur so richtig wie die der Ableitung zur Verfügung gestellten Naturerkenntnisse, von denen die Rechnung ausgeht, oder die sie unterwegs in Gestalt von Hinzufügungen aufnimmt. Die Mathematik wirkt in allen Anwendungen auf Naturvorgänge nur wie eine Mühle, die nicht im mindesten mehr Wissen von der Natur herausgibt als man in sie hineinfüllt. Allerdings kann sie vorhandenes, aus Naturbeobachtung gewonnenes Wissen manchmal in so verblüffend veränderter Form zeigen, daß man dann wohl sagen kann, sie weise Dinge auf, von denen man noch gar nicht bemerkte, daß man sie bereits wußte. Grundsätzlich kann aber Mathematik nichts anderes bieten als gewöhnliches Denken auch, und wo letzteres genügt — was sehr oft der Fall ist —, ist der „mathematische Beweis" überflüssige Rechenübung.

Eben die — sozusagen — Treue und Sauberkeit der Mühle Mathematik, nichts Fremdes hinzuzutun, auch bei der verwickeltsten Arbeitsleistung nicht, bedingt ihren unschätzbaren Wert. Sie sichert gut vor Irrtum und Fehlschlüssen, wo man an die Grenzen der Bewältigung durch einfaches Denken kommt, oder gar wo wegen der Verwickeltheit der Umstände letzteres allein ganz versagen muß.

Untrüglich sind „mathematische Ableitungen" schon deshalb nicht, weil es ganz darauf ankommt, ob Willkür bei Anwendung der Mathematik gesichert ausgeschaltet geblieben ist, was oft schwer zu sehen ist: es kommt — auch bei Anwendung von Mathematik — auf den Charakter des Arbeitenden an. Man kann mit Mathematik sogar viel besser täuschen als mit gewöhnlichen Worten. Die noch verbreitete hohe Meinung von der Untrüglichkeit der Mathematik stammt aus der Zeit, da nur Männer von höchstentwickeltem Wahrhaftigkeits-Gefühl, wie es Ariern eigen ist, mit Mathematik und Naturwissenschaft hervortretend sich beschäftigt haben.

Vollständig in die Irre kann die Anwendung mathematischer Formeln auf Naturvorgänge auch bei ganz richtigem Rechnen dann führen, wenn man es

---

Wärme" war auch unzutreffende Übertreibung, wo nur eine Theorie der Wärmeleitung (Anh. W I. Bd. II) gegeben war.

Maxwell brachte 1873 die höchst beachtenswerte Leistung, elektrodynamische Entdeckungen Faradays und noch mehr in Differentialgleichungen zusammenzufassen. Es erschienen von da ab viel Werke und Schriften über „Maxwells Theorie" und „Elektromagnetische Lichttheorie"; für die Hauptleistung, die tatsächliche Herstellung der von Maxwell bearbeiteten elektrischen Wellen, waren sie nutzlos. Diese Leistung hätte auf kürzestem Wege sogar ohne die Gleichungen, nur einfachsten Gedanken folgend — wie Faraday sie pflegte —, erreicht werden können (s. die Darstellung in E 410 u. f.), und nur der Vernachlässigung dieser, unmittelbar der Naturbeobachtung entnommenen Gedanken ist es zuzuschreiben, daß die Herstellung der Wellen erst 1888 (durch Hertz) erfolgte. Nur zur nachträglichen, feineren Verfolgung des Gegenstandes (z. B. E 421) waren Maxwells Gleichungen erforderlich.

Zwei neuere „Theorien", die oft genannt werden, sind geeignet, den Namen Theorie sogar in Verruf zu bringen; sie gehören nicht, beziehlich nicht in dem ihnen gewöhnlich zugeschriebenen Umfange in die deutsche Physik. Denn die eine ist nur Täuschung (siehe S. IX, X u. E 589), die andere übertreibt ihren Inhalt in irreführender Weise (W 182).

versäumt, stets den Naturvorgang vor Augen zu haben, der rechnend verfolgt werden soll[1]). Die Anwendung der Mathematik in der Naturwissenschaft besteht überhaupt nicht im Rechnen, sondern in rechnender Verfolgung bestimmter Naturvorgänge. Es muß jede Größe in der Rechnung ihre konkrete Bedeutung in dem betreffenden Naturvorgang haben, und diese Bedeutung muß andauernd vor Augen bleiben[2]). Denken mit der Natur muß dem Rechnen zugrunde liegen. Dies wird oft — auch in der einfachsten Schulphysik — versäumt, und darauf beruht die Unfruchtbarkeit von vielem, was in Schulen mit Anwendung von Mathematik gelehrt wird. Die größten Auswüchse der Naturwissenschaft, die gar nicht in die Deutsche Physik gehören, bestehen darin, daß gerechnet wird, ganz ohne an Naturvorgänge zu denken.

16. Wahrheitswert der Naturforschung. — Die der Beobachtung der Naturvorgänge entnommenen, ihnen angepaßten und an ihnen fortdauernd nachgeprüften Begriffe und Gesetze — die Hauptergebnisse der Naturforschung — sind Erkenntnisse von Wirklichkeiten, von Dingen und Beschaffenheiten, die unabhängig von uns und unserem Denken bestehen und die außer uns längst vorgegeben waren. Diese Ergebnisse haben Wahrheitswert. Wahr ist, was in unserem Geist übereinstimmt mit jener, von den Willkürlichkeiten unseres Geistes unabhängigen Wirklichkeit. Wahr ist nicht was hier oder da sich „bewährt", sondern was immer sich bewähren muß, weil es der allzusammenhängenden Wirklichkeit entnommen ist.

Die Erkenntnis des Allzusammenhangs in der Natur ist eine der hervorragendsten Errungenschaften der Naturforschung. Es hat sich bei allem Fortschreiten der Naturwissenschaft immer nur deutlicher und umfassender gezeigt, daß alle Vorgänge in der beobachtbaren Welt mit allen anderen Vorgängen in derselben verknüpft sind; jedes der gefundenen Naturgesetze hängt ersichtlich immer mit mehreren anderen zusammen derart, daß sie alle einander stützen und keines ohne die anderen richtig sein könnte. Wir werden diesen vielseitigen Zusammenhang in vielen Fällen besonders bemerken[3]).

Man kann danach wohl sagen, daß das Verständlichmachen noch unverstandener Dinge auch darin besteht, ihren ohne Zweifel vorhandenen Zusammenhang mit schon Bekanntem und dadurch mit allem in der Natur aufzudecken und im einzelnen ersichtlich zu machen. Eben die Sehnsucht des nordischen Menschen nach Erforschung geahnter Allzusammenhänge war der Ursprung der Naturforschung. Die Ahnung war richtig; aber ihre Erfüllung auf oft unerwartet mühsamen Wegen zeigte meist die Wirklichkeit ganz anders beschaffen als es zuerst gedacht war. Die Wunder der Wirklichkeit waren nicht in unserem eigenen Geist zu finden; sie mußten erst in der Außenwelt entdeckt werden (vgl. 6 und 13). Damit waren sie dann dem zunächst überraschten Geist einverleibt; er ist damit reicher geworden an bewußter Übereinstimmung mit dem Naturganzen.

Daß die Ahnung großer Naturzusammenhänge — der Antrieb der großen

---

[1]) Es muß das kein Vorgang an Materie sein, es kann auch ein Äthervorgang sein.

[2]) Eine Skizze auf Papier kann dabei helfen. S. als ein einfachstes Beispiel M 146. — Ein gegenteiliges Beispiel (Vergessen der genauen Bedeutung der Rechnungsgrößen) s. im Anhang E V, Bd. IV.

[3]) Ein erstes Beispiel bietet M 85.

Forscher — auch mit Einbeziehung unseres eigenen Geistes in diese Zusammenhänge richtig war, dies zeigte im Erfolg die Einfachheit der Ergebnisse (11); denn einfach erscheint uns, was unserem Geist angemessen, was für sein Begreifen wie von vornherein eingerichtet ist.

17. Angewandte Physik, technische Physik. — Jeder verstandene Naturvorgang kann mit Hilfe der zugehörigen Begriffe und Gesetze auch in seinem zukünftigen Verlauf vorausberechnet werden, wenn die Anfangsumstände gegeben sind. Ebenso können die Anfangsumstände so gewählt werden, daß der Verlauf ein gewollter, etwa den Bedürfnissen des praktischen Lebens dienlicher wird. Darauf beruht die jetzt hoch entwickelte Technik. Ihre Leistungen sind ebenso allgemein bekannt, als die Ursprünge, welche die Möglichkeiten gaben, meist unbekannt sind. Am ergiebigsten haben sich immer — nach Verlauf genügender Zeit — die ganz neuartigen, nur aus dem Drang nach Erforschung der Wirklichkeit gewonnenen Kenntnisse gezeigt, wie sehr fern der Anwendung stehend sie auch anfänglich scheinen mochten.

18. Grenzen des Begreifens. — Manche der Gesetze, die das Begreifen der Natur vermitteln, haben Gültigkeitsgrenzen gezeigt, was bedeutet, daß für ihre Anwendbarkeit gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen. Fortschreitende Erkenntnis hat dann oft auch gezeigt, was außerhalb dieser Grenzen gilt und hat dadurch allgemeinere Gesetze kennen gelehrt, die die beschränkteren in sich fassen, und in dieser Weise sind auch noch weitere Fortschritte zu erwarten.

Das vollständige Begreifen irgendeines Naturvorganges muß aber für unmöglich erachtet werden; es fiele solches Begreifen wegen des Allzusammenhangs in der Natur (16) mit dem Begreifen der gesamten unendlichen Welt zusammen, und davon müssen wir im wahren Sinne des Wortes stets unendlich weit entfernt bleiben allein schon wegen der Endlichkeit unseres Körpers, an welchen unser begreifender Geist gebunden ist. Es ist uns erfahrungsmäßig nicht möglich, allzuvieles auf einmal zu erfassen, und selbst abwechselndes Erfassen unendlich vieler Dinge von endlichem Ausmaß würde unendlich lange Zeit erfordern. So kommt es, daß wir hinter jedem enthüllten Geheimnis der Natur immer noch ein größeres Geheimnis gefunden haben.

Es hat sich beim Fortschreiten der Naturforschung aber außerdem gezeigt, daß es auch in der materiellen Welt — beim Absehen also von der Geisterwelt — Dinge verschieden schwerer Begreifbarkeit gibt. Betrachtet man nur die Materie, so hat man es mit Mechanismen zu tun, von denen der Geist sich Bilder machen kann gleich Modellen, die nach den Gesetzen der Mechanik sich verhalten und mit denen verhältnismäßig leicht zu arbeiten ist. Schon die Erscheinungen der Wärme bieten schwierigere Fälle von Bewegungen der Materie. Noch anders ist es aber, wenn der Äther zu betrachten ist, wozu Licht und Elektrizität allen Anlaß geben. Die Begriffe sind zwar gefunden, welche den Vorstellungen vom Äther festen Anhalt geben; aber Mechanismen im Äther hat man vergeblich gesucht; alles in dieser Richtung probeweise Erdachte stimmt schlecht mit der Wirklichkeit. Der Äther ist offenbar schwerer zu begreifen als die Materie; er scheint schon die Grenzen des Begreiflichen zu zeigen. Daß diese Grenzen beim Versuch, die Welt der Geister zu begreifen, vollständig überschritten sind, ist offensichtlich; kein Mensch kann auch nur seinen eigenen Geist begreifen. Wir

werden einige Male Gelegenheit haben, Erscheinungen an den Lebewesen hervorzuheben, die ganz aus dem Rahmen von Naturforschung herausfallen, weil sie unbegreiflich sind.

19. Stoffwahn, Materialismus. — Diese sonderbare Geistesrichtung, die Geist nicht haben will, nur Materie, ist zu erwähnen, weil sie als Auswuchs von Naturwissenschaft sich dargeboten hat. Die großen Errungenschaften der Naturforschung im Begreifen vorher unzugänglich erschienener Teile des Weltganzen haben zu übermütigem Hinweggehen über Unbegriffenes geführt. Die größten Forscher haben daran niemals teilgenommen; ihnen waren die Grenzen des Begreifens stets gegenwärtig; hatten sie die vorgefundenen Grenzen überschritten, so sahen sie doch sogleich neue Grenzen vor sich, an denen sie Halt machen mußten. Wohl aber haben die kleinen Geister, denen die großen in ihrem Gefolge leichte Arbeit gaben, den Übermut vom Alleswissen gezüchtet. So war es nach Newton und dann wieder nach Darwin.

In neuester Zeit haben die Erfolge der Technik eine besondere Art von übermütigem Stoffwahn gebracht. Mit der Ausnutzung der praktischen Möglichkeiten, die das Verstehen der Natur gab (17), kam der Gedanke des „Beherrschens" der Natur auf: „Der Mensch war langsam Herr der Natur geworden." Solche Äußerungen im Sinne geistesarmer Großtechniker haben durch den Prunk, welchen deren Mittel ermöglichen, viel Einfluß gewonnen, und die Wirkung des allzersetzenden, in Physik und Mathematik eingedrungenen Fremdgeistes hat ihn verstärkt. Die Geisteswissenschaften haben demgegenüber — der Naturerkenntnis zunehmend fernstehend und auch nicht in deutscher Art gepflegt — sehr versagt.

Mechanik

oder

Allgemeine Physik der Materie.

I. Allgemeine Eigenschaften der Materie.

1. Vor allem ist es nötig, die aller Materie gemeinsamen Eigenschaften ins Auge zu fassen, um ein in großen Zügen treffendes Bild von der Materie zu erhalten. Es kann dabei die Materie auch in Vergleich mit dem Äther gesetzt werden.

Es ist mit Recht von alters her ein Kapitel über die allgemeinen Eigenschaften der Materie der Physik vorangestellt worden; es kommen dabei auch Gegenstände zur Sprache, wie Raum und Zeit, über die alle Naturwissenschaft von vornherein klar sein muß.

Die Materie erscheint uns in sehr verschiedenen Gestalten; wir finden verschiedenartige Anhäufungen von Materie. Jede Anhäufung von Materie nennen wir einen Körper, und wir finden drei verschiedene Anhäufungs-Arten, oder „Aggregat-Zustände“: feste, flüssige und gasförmige Körper. Wir fragen nun nach den allgemeinen Eigenschaften aller Körper, und wir betrachten 7 solcher Eigenschaften (2—71).

1. Die Ausdehnung oder Raumerfüllung.

2. Materie und Äther im Raum. — Alle Körper, die wir finden, haben ihr Dasein im Raum und nehmen bestimmte Teile desselben ein. Diese Eigenschaft der Raumerfüllung kommt nicht nur der Materie, sondern auch dem Äther zu, also allen Teilen der materiellen Welt. Die Geisterwelt erscheint räumlich überhaupt nicht festlegbar; Geister, die in Lebewesen an Materie gebunden sich finden, haben allerdings zugleich mit dem Körper an bestimmten Stellen des Raumes ihren besonderen Sitz, ohne aber dadurch räumlich irgendwie umgrenzt zu sein. Es zeigt sich, daß es wohl ähnlich mit den Teilen des Äthers steht, die zu bestimmten Teilen der Materie gehören (O 23). Doch haben wir es jetzt, bei der Behandlung der Materie, nur mit leicht zu sichernder Erfahrung zu tun.

3. Der Raum. — Wir haben vor allem den Raum an sich zu untersuchen. Der Raum ist der Schauplatz aller unserer Wahrnehmungen. Er ist nicht nur da, wo die wahrnehmbaren Körper sind; er ist überall, auch wo keine Körper sind; Raum ist auch von Gestirn zu Gestirn, und wir messen sogar die Größe solchen Raumes.

Es zeigt sich, daß der Raum eine dreifache Ausdehnung hat; er ist „dreidimensional“. Dies ist eine einfache Erfahrungstatsache. Jeder hat die zugehörigen Erfahrungen schon in der Kinderzeit gemacht oder doch zu machen begonnen, so daß er später nur noch ganz klar darüber zu werden brauchte. Wir fangen frühe damit an, den Raum mit Händen abzutasten; wir bewegen uns bald in ihm mit dem ganzen Körper und zuletzt mit dem Blick der Augen bis in beliebige Fernen. Damit ist schon soviel Erfahrung gewonnen, daß das

Folgende nur mehr Gedankenversuch (Einl. 13) zu sein braucht: Zuerst gehen wir — in Wirklichkeit oder im Gedanken — in einer ausgewählten Richtung, z. B. horizontal, dieselbe beibehaltend, d. i. geradlinig voran und auch zurück und wir bemerken, daß wir an eine Reihe verschiedener Stellen des Raumes kommen, da wir eine Reihe verschiedener Körper oder Körperteile dort finden. Aber wir merken, daß wir so keineswegs an alle vorhandenen Raumstellen kommen. Dann nehmen wir Verschiebungen in bestimmter Querrichtung zur bisher eingehaltenen Richtung vor, z. B. wieder horizontal; wir merken, daß wir jetzt an neue Stellen des Raumes kommen, die allesamt mit den vorigen in einer Ebene liegen, wie man es nennt. Noch immer bleiben aber Raumstellen über, die wir so nicht erreichen. Erst wenn wir noch eine dritte, zu den beiden schon benutzten Richtungen quer stehende Bewegungsrichtung mit zu Hilfe nehmen, in unserem Beispielsfalle die senkrechte, wird es uns möglich an alle überhaupt auffindbaren Raumstellen zu gelangen. Andere Raumpunkte, als die mittels Aneinanderreihung dreier aufeinander senkrecht stehender Verschiebungen erreichbaren, gibt es erfahrungsmäßig nicht, und dies eben wird mit der „Dreidimensionalität des Raumes" behauptet[1]).

Es ist kein Zweifel, daß der Raum etwas unabhängig vom Menschen Vorhandenes ist. Denn alles was (außer unserem eigenen Körper) sein Dasein und damit den Raum merklich macht — Erde und alle Himmelskörper — bleibt erfahrungsmäßig unabhängig vom Vorhandensein eines oder wohl auch beliebig vieler Menschen bestehen. Der Raum ist etwas Naturgegebenes und wäre auch ohne Menschen da; er muß, wie alles andere in der Natur, vom Menschen erst ergründet, erforscht werden, wie angegeben.

Die Gesamteigenschaften des Raumes waren und sind übrigens auch gar nicht so leicht vollständig erforschbar. Euklid hat (300 Jahre vor unserer Zeitrechnung) in seinen „Elementen" alles Wesentliche hierzu getan und damit die Lehre vom Raume, die „Geometrie" begründet. Manchen seiner Sätze, auf die er alle Eigenschaften der im gegebenen Raum möglichen Gebilde zurückführt, liegt nur beschränkte Erfahrung zugrunde, so z. B. dem Satz, daß jede gerade Linie unbeschränkt verlängert werden kann (den Euklid als „Forderung" hinstellte); es ist aber auch keine Erfahrung vorhanden, die gegen den Satz spräche.

Alle drei Raumdimensionen zeigen sich von gleicher Art; sie sind beliebig miteinander vertauschbar; auch ist die Wahl der Ausgangsrichtung gleichgültig. Die Bezeichnungen der drei Dimensionen mit verschiedenen Namen, wie z. B. „Länge", „Breite", „Höhe", geschieht nur mit Rücksicht auf Nebendinge, die

[1]) Kant's Erörterungen über den Raum — und auch die Zeit — als dem Menschen von vorneherein gegebenen Formen der Anschauung scheinen die Erfahrungen der Kinderzeit zu übersehen und auch die Tatsache, daß der Mensch selbst einen Körper mit Raumerfüllung und also mit Raumeigenschaften (und mit zeitlichen Vorgängen) besitzt, so daß er auch ohne an die übrige Welt sich zu wenden schon an sich selbst Erfahrungen am Raum (und über Zeit) zu allerfrühest ganz oder halb unbewußt sammelt. Daß der Geist des Menschen Raumkenntnisse von vor der Geburt her mit sich bringe ist nicht ersichtlich; wohl aber kann es vererbte körperliche und (damit zusammenhängend) geistige Beschaffenheit sein, die dem begabt Geborenen das Begreifen des Raumes und seiner Eigenschaften erleichtert. Vollständig verfehlt ist es selbstverständlich, den Raum mit den Vorstellungen des Menschengeistes (Einl. 9) vom Raum zu verwechseln und so den „Raum" für ein Gebilde des Menschengeistes zu erklären.

dem Raume selbst nicht zugehören. Es sind nur einfach die Eigenschaften gerader Linien, welche wir bei den drei Raumdimensionen finden.

4. In allen diesem und in aller weiter fortwährend zu benutzender Kenntnis vom Raume haben wir uns an die von Euklid gesammelte Erfahrung zu halten. Denn die Anwendung von Euklids Geometrie auf alle räumlichen Betrachtungen der gesamten Naturforschung hat zu Ergebnissen geführt, die ausnahmslos untereinander und mit aller fortdauernd neu beobachteten Wirklichkeit widerspruchsfrei übereinstimmen[1]). Diese umfassende Bewährung der schon von Euklid am irdischen Raum gesammelten Erfahrung an allen Räumen, auch des Himmels, zeigt, daß der Raum überall dieselbe Beschaffenheit hat. Man konnte Räume mit anderer Beschaffenheit erdenken (vgl. Einl. 8); doch haben diese — soweit irgend bemerkbar war — mit der Wirklichkeit nichts zu tun.

Der allgleichen Beschaffenheit des Raumes steht übrigens zur Seite die Allgültigkeit der Bewegungsgesetze der Materie auch im Himmelsraum (M 205 bis 245) und der einheitliche Aufbau der irdischen wie der Himmelskörper aus denselben Grundstoffen (O 91).

5. Messung. — Da wir quantitativ vorzugehen haben (Einl. 7) kommt es auf die Ausmessung des Raumes an, zunächst auf Längenmessung.

Es tritt hiermit ein erstes Beispiel von Messung überhaupt auf.

Messen heißt vergleichen und zwar zahlenmäßig vergleichen. Man muß dazu einen Vergleichsgegenstand haben, und dieser wird die Maßeinheit oder kurz „Einheit" genannt. Da man nur Dinge gleicher Art zahlenmäßig miteinander vergleichen kann, muß die Einheit stets von derselben Art sein wie der zu messende Gegenstand. Wir brauchen also z. B. zur Längenmessung eine Längeneinheit. Wir erhalten eine solche, wenn wir unter allen vorkommenden Längen eine herausheben — als „Maßstab" — um mit ihr dann alle anderen Längen zu vergleichen. Die Vergleichung selbst, die Messung, besteht in der Abzählung der Einheits-Längen, welche in der zu messenden Länge enthalten sind, was im einfachsten Falle mit wiederholtem Anlegen des Maßstabes ausführbar ist. Das Ergebnis der Messungen ist dann eine Zahl, die angibt, wie viel mal so groß das zu Messende ist als die Einheit.

Diese Zahlenangabe zusammen mit der Einheit legt die gemessene Größe vollkommen fest. Dies gilt nicht nur für Längen, sondern für Größen jeder Art: Jedes Meßergebnis ist ein mathematisches Produkt aus 2 Faktoren, Zahl und Einheit. Die Angabe der Zahl allein bedeutet noch gar nichts; bei einer Länge „10" z. B. weiß man nicht, ob es 10 mm oder 10 km sein sollen. Es wird dies in Druckschriften oft übersehen, zu deren Zahlentabellen man dann erst mühsam die benutzte Einheit suchen oder gar zu erraten suchen muß, wenn man ernstlichen Gebrauch von den Zahlen machen will. Auch gibt die Beisetzung der Einheit sofort einen Hinweis auf die Art der Größe, um welche es sich handelt; 10 mm bedeuten z. B. eine Länge, niemals eine Zeit.

6. Die Wahl von Einheiten ist immer eine wichtige Frage, da jede Ab-

[1]) Man wende nicht ein, daß die Prüfmittel für den Raum nur auf Grund von Euklids Geometrie eingerichtet seien. Denn die Prüfmittel sind Naturgegenstände und wirken durch Naturvorgänge; sie können daher nur die tatsächliche, nicht irgendeine vorgedachte Beschaffenheit des Raumes anzeigen.

änderung der Einheit oder jede Unsicherheit in derselben alle Meßergebnisse ändern bez. unsicher machen würde.

Die Wissenschaft ist heute im Besitz einer so gut wie möglich gesicherten Längeneinheit; es ist das bekanntlich das Meter (m) oder seine Unterabteilungen oder Vielfachen nach Zehnerpotenzen mit den bekannten Namen und kurzen Zeichen. Man war nicht immer so gut daran. Die älteren Längeneinheiten, die Fuße (Zolle, Linien), deren es gleichzeitig viele gab (z. B. den Nürnberger Fuß, den preußischen Fuß, Wiener Fuß, Pariser Fuß, englischen Fuß) mit erheblichen Größenunterschieden, die ganz willkürlich waren, bei doch schlechthin gleichem Namen, verursachten viel Beschwerde im Gebrauch durch Umrechnung oder gar Verwechslung. Das Gute am Meter ist schon die Art seiner Wahl; sie ist so getroffen, daß sie für alle Gegenden der Erde passen kann: Das Meter ist bekanntlich von der Erde selbst genommen; es wurde als der 10-millionte Teil des Erdmeridianquadranten festgelegt. Geodätische Messungen, Triangulationen mittels eines vorläufigen Einheits-Maßstabes (einer gewissen Toise), worauf wir hier nicht näher einzugehen brauchen, hatten ergeben, wieviel mal so lang als dieser Einheits-Maßstab das Meter sein muß, um jener Wahl zu genügen, und danach wurde der jetzt noch in Sèvres bei Paris aufbewahrte Ur-Meter-Maßstab verfertigt. Er besteht, um möglichst unveränderlich zu sein, aus einer Platinlegierung; zwei feine Striche in der Nähe seiner Enden geben die Endpunkte der Länge an, die, bei der Temperatur 0^0 des Stabes, 1 m sein soll. Alle Länder der Erde besitzen Kopien dieses Ur-Meters, die dauernd wiederholter Nachvergleichung mit demselben und untereinander unterliegen, und nach diesen Normalmeterstäben werden alle Gebrauchs-Maßstäbe gemacht.

7. Es war ursprünglich gedacht, daß dieser Längeneinheit, dem Meter, auch der Vorzug zukommen solle, unverändert wieder herstellbar zu sein, wenn auch alle Normalmeterstäbe verloren gingen oder veränderlich sich zeigten: Es wäre dann das Meter von neuem von der Erdkugel abzunehmen. Demgegenüber muß man sich klar sein, daß alle Messungen nur bis zu einer gewissen Grenze der Genauigkeit vollbracht werden können, welche Grenze durch fortwährende Vervollkommnung der Meßweisen und der Meßmittel immer weiter hinausgeschoben wird. Man würde infolgedessen heute mit größerer Genauigkeit als einst in den Jahren 1800 den 10-millionten Teil des Erdquadranten feststellen, und es wäre das Urmeter nach neueren Messungen auch in der Tat um fast 0·1 mm zu verlängern. Zudem ist aber auch der Erdkörper selbst nicht als ganz unveränderlich anzunehmen. Es muß daher klar sein, daß wahre Längeneinheit das sorgfältig aufbewahrte und vervielfältigte Urmeter aus dem Jahre 1800 ist.

Je mehr feine Messungen von unveränderlich zu haltenden und leicht zugänglichen Längen mit dieser Einheit schon ausgeführt sind, desto mehr wird übrigens die Gewähr der Festhaltung der Einheit wegverschoben von bestimmten Aufbewahrungsorten und auf breitere Grundlage gestellt. In diesem Sinne können jetzt schon die zu bestimmten Atomen gehörigen Ätherwellenlängen als gute Hilfsmittel zur Festhaltung des Meters aufgefaßt werden.

8. Die Unterteilung des Meters, z. B. die Herstellung genauer Millimetermaßstäbe, erfolgt mittels der Teilmaschine. Das Wesentliche an derselben ist eine Schraube, welche bei ihrer Drehung den strichegebenden Stichel oder Diamanten von Strich zu Strich verschiebt. Die Schraube muß so lang sein als der zu teilende Maßstab werden soll; ihr Kopf ist groß und am Umfang mit einer Teilung versehen, so daß um jeden gewünschten Bruchteil einer Umdrehung weitergedreht werden kann, also auch der Stichel jede gewünschte Verschiebung erhalten kann, die in Millimetern bekannt ist, sobald man die Ganghöhe der Schraube kennt. Setzt man an Stelle des Stichels ein Mikroskop mit Fadenmarke an die Teilmaschine, so kann man die Marke an einem vorhandenen Maßstab, z. B. einem noch ungeteilten Meter, entlang gleiten lassen, unter Zählung der Umdrehungen und deren Bruchteile, und so die Ganghöhe ermitteln.

Es ist leicht einzusehen, daß die Teilmaschine mit dem Mikroskop zugleich ein *sehr wertvolles Längenmeßinstrument* ist, das große und kleine Längen bis auf beliebig kleine, nur unter dem Mikroskop eben noch sichtbare Bruchteile des mm ermitteln läßt. Die Herstellbarkeit guter optischer Gitter mit der Teilmaschine beweist, daß es gelingt 1000 und mehr Striche von sehr genau gleichem Abstand auf das mm mit ihr zu ziehen, also auch mit entsprechender Genauigkeit mit ihr zu messen. Das Wesentliche im Verlaß auf die richtige Unterteilung gegebener Längen mit Hilfe der Schraube besteht darin, daß eine Schraube, welche ihrer ganzen Länge nach gleichmäßig gut durch eine und dieselbe Mutter geht, eben dadurch schon die Gleichheit aller ihrer Ganghöhen verbürgt. Es kann diese Gleichheit durch absichtlich oft wiederholtes Hin- und Herlaufenlassen der Schraube in der Mutter bei gutem Material der Spindel vom Hersteller mit beliebiger Sicherheit erzielt werden.

9. Im einfachsten Falle erfolgt die Messung nicht zu großer Längen durch Anlegen eines in mm geteilten Maßstabes an den zu messenden Gegenstand. Zehntel-Millimeter lernt man mit großer Sicherheit nach Augenmaß schätzen.

Man hat aber auch ein besonderes Hilfsmittel, um Bruchteile von Strichabständen (Skalenteilen, Sk) irgend eines Maßstabes, z. B. Bruchteile von mm direkt abzulesen: den *Nonius* (Abb. 1). Derselbe besteht aus einem kleinen Hilfsmaßstab a b, welcher längs des Hauptmaßstabes A B verschiebbar ist. Der Hilfsmaßstab („Nonius") ist in 10 gleiche Teile geteilt, wenn man Zehntel der Sk des Hauptmaßstabes messen will, wie in der Abbildung (in 30, wenn man beispielsweise 30stel messen will), und es ist der Nonius im ganzen um 1 Sk des Hauptmaßstabes kürzer als die Zahl seiner Teile angibt, also in Abb. 1 nur 9 Sk lang. Es ist leicht einzusehen, daß danach jeder Noniusteil um $^1/_{10}$ (bez. z. B. $^1/_{30}$) Sk kürzer ist als der Sk des Hauptmaßstabes. Die Messung besteht darin, daß man das eine Ende der zu messenden Länge (schraffierter Gegenstand in der Abbildung) an den Nullstrich des Hauptmaßstabes legt und den Nullstrich des Nonius an das andere Ende bringt. Es kommt dann nur mehr darauf an, die Stellung des Nonius-Nullstriches am Hauptmaßstab abzulesen. Die ganzen Sk liest man unmittelbar ab (11 in der Abbildung). Den noch darüber hinausgehenden Rest findet man in den gewünschten Bruchteilen am Nonius einfach dadurch, daß man denjenigen Nonius-Teilstrich aufsucht, der mit einem Teilstrich des Hauptmaßstabes übereinstimmt; die Zahl dieses Nonius-Teilstriches gibt die Zahl der gesuchten Bruchteile (2 in der Abb., wonach die zu messende Länge dort 11·2 Sk ist).

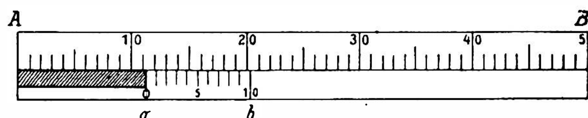


Abb. 1. Nonius.

Die *Schiebleere* ist ein sehr gebräuchliches, gewöhnlich auf Zehntelmillimeter eingerichtetes Nonius-Meßwerkzeug.

Ein anderes Mittel, um Bruchteile eines mm mit Sicherheit zu ermitteln, ist die *Mikrometerschraube*, welche nach dem bei der Teilmaschine Gesagten bereits verständlich ist. Der *Schraubentaster* ist eine kleine Mikrometerschraube, gewöhnlich mit der Ganghöhe 1·000 mm und mit einem 100-teiligen Kopf, so daß man unmittelbar 100stel mm ablesen kann.

Daß man kleinste Längen unterm *Mikroskop* messen kann, wozu dasselbe am besten eine in mm geeichte Skala oder eine Mikrometerschraube im Okular hat, ist so gut wie selbstverständlich. Die Meßmöglichkeit geht dabei aber doch nur bis zu ½ Wellenlänge des benutzten Lichtes, also etwa bis zu 0·0003 mm (vgl. O 69).

Will man noch weiter gehen, so stehen optische Interferenzmethoden und noch ganz andere, von Fall zu Fall verschiedene, indirekte Wege zur Verfügung, die gelegentlich zur Erörterung kommen. Als sehr kleine und doch meßbare Längen seien die Durchmesser von Atomen erwähnt, die von der Größe 10^{-7} mm sind (Tab. 1).

10. Wichtig ist bei allen Längenmessungen und überhaupt Teilstrich-Ablesungen die Vermeidung des *Parallaxenfehlers*. Derselbe kann auftreten, wenn Maßstab und zu messender Gegenstand nicht in der selben Ebene sich befinden (s. Abb. 2). Ist dann die Sehrichtung beim Ablesen der beiden Enden der zu messenden Länge nicht parallel gehalten (1 und 2 a, statt 1 und 2 in der Abb.), so hat man den Parallaxenfehler. Man sieht, daß derselbe um so größer wird, je größer die Abweichung von der Parallelität der Sehrichtungen und je größer der Abstand zwischen Gegenstand und Maßstab ist. Fallen Gegenstand und Maßstab in dieselbe

Ebene, so ist der Parallaxenfehler von vornherein ausgeschaltet. In dieser Hinsicht sind auf Glas geteilte Maßstäbe von besonderem Vorteil, da man die geteilte Seite auf den Gegenstand legen und durch das Glas ablesen kann.

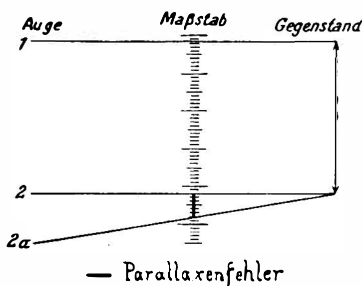


Abb. 2. Parallaxenfehler.

Große Parallaxenfehler können vorkommen, wenn der Gegenstand das unmittelbare Anlegen des Maßstabes gar nicht gestattet, z. B. wenn die Höhe einer Quecksilbersäule in einem Glasrohr zu messen ist etwa bei erhöhter Temperatur, der der Maßstab nicht ausgesetzt werden darf. Für solche Fälle dient das Kathetometer, ein längs des Maßstabes parallel bleibend verschiebbares Fernrohr mit Fadenmarke, mit dem man die Enden des zu messenden Gegenstandes anvisiert. Die Parallelverschiebung wird dabei am besten mittels einer Libelle oder Wasserwaage kontrolliert, welche in leicht verständlicher Weise aus einem sehr schwach gekrümmten Glasrohr mit Flüssigkeitsfüllung (meist Alkohol) und einer Luftblase besteht.

11. Die Messung zweidimensionaler Gebilde, Flächenmessung, ist mittels Längenmessung zu erledigen, wenn die Begrenzung der zu messenden Flächen geometrisch wohldefiniert ist. Man rechnet dann nach den Regeln der Geometrie. Soll z. B. eine Kreisfläche ausgemessen werden, so mißt man den Durchmesser $2r$ und berechnet die Fläche als $r^2\pi$. Man erhält in all diesen Fällen eine bestimmte Zahl, aber auch eine bestimmte Einheit, im Rechnungsergebnis. Ist z. B. $2r = 10$ cm, so erhält man $r^2\pi = 25\,\pi\,\text{cm}^2$. Es tritt also von selber das cm^2 als Flächeneinheit auf, d. i. die Fläche des Quadrats mit der Längeneinheit als Seitenlänge; sie mußte auftreten, da das Quadrat die bei allen Flächenbestimmungen der Geometrie zugrunde gelegte Einheit ist.

12. Es tritt hier, mit der Flächeneinheit, ein erstes Beispiel einer abgeleiteten Einheit auf, im Gegensatz zur Grundeinheit, der Längeneinheit.

Grundeinheiten werden mehr oder weniger willkürlich gewählt; abgeleitete Einheiten ergeben sich aus den Grundeinheiten stets nach einfachsten Möglichkeiten oder nach Naturgesetzen, ohne neue Willkür[1]). Man verkennt diesen Wert der abgeleiteten Einheiten und verdirbt ihn für die Anwendung in Rechnungen, wenn man für diese Einheiten willkürliche Zeichen benutzt, so wenn man statt cm^2 qcm schreibt.

13. Ist die Umgrenzung der zu messenden Fläche geometrisch nicht genügend definiert, so kann man, wenn die Fläche eben ist, sie aus Pappe, Blech oder sonstigem flächenhaft gleichförmigen Material ausschneiden und mit der Waage messen, indem man die aus demselben Material hergestellte Flächeneinheit als Gewichtseinheit benutzt. Es gibt aber auch besondere Instrumente, Planimeter genannt, die nach Umfahrung der zu messenden Fläche mit einem Stift den Flächeninhalt unmittelbar ablesen lassen.

14. Die Raummessung oder Volummessung bietet hiernach nichts Neues mehr. Bei geometrisch genügend definierter Form kann man nach Längenmessungen rechnen. Die Einheit, das cm^3 oder das auch Liter genannte dm^3, ist wieder abgeleitete Einheit.

Die Raummessung mit der Waage, nach demselben Gedanken wie bei den

[1]) Weitergehende Erläuterungen zu diesen Abschnitten 11 und 12 mit Beispielen findet man in E 289 und 291, wo auch der Begriff der „Dimension“ eingeführt wird.

Flächen (13), ist sehr gewöhnlich und führt stets am genauesten zum Ziele. So wird z. B. der Hohlraum eines Gefäßes sehr leicht durch Auswiegen mit Wasser ermittelt. Es kommt dabei zu Hilfe, daß 1 cm³ Wasser 1 gr wiegt. Dies gilt bei 4° Temperatur; für andere Temperaturen ist das Gewicht des cm³ Wasser ebenfalls ermittelt (W 22, Tab. 19). Wir kommen auf die Raummessung mit der Waage wiederholt zurück (70, 308, 354).

2. Greifbarkeit.

15. Als eine zweite, aller Materie gemeinsame Eigenschaft wurde von altersher die Undurchdringlichkeit oder Greifbarkeit genannt, genauer gesagt: gegenseitige Undurchdringlichkeit. Wir können Materie vermöge dieser Eigenschaft an bestimmten Stellen festhalten, z. B. in der Hand, die auch aus Materie besteht und für den festgefaßten Körper undurchdringlich ist. Selbst auch Gase kann man greifen und festhalten in geeigneten Gefäßen. Nicht so aber den Äther, der alles frei durchdringt. Er durchdringt nicht nur alle Materie, so daß er in keinerlei Gefäßen festgehalten werden kann, sondern es ist wohl so, daß auch verschiedene Teile des Äthers, die zu verschiedenen Teilen der Materie gehören, einander derart frei durchdringen, daß sie ohne merkliche gegenseitige Beeinflussung gleichzeitig im selben Raum vorhanden sein können.

Hier haben wir also eine Eigenschaft, die Materie von Äther unterscheidet, und in der Tat hat man schon in frühen Zeiten zur besonderen Kennzeichnung von Materie den Ausdruck „greifbare Materie" gebraucht. Der Äther ist nicht greifbar, nicht undurchdringlich; er ist durchdringlich.

16. Wollen wir die Undurchdringlichkeit schärfer fassen, so könnten wir sagen: „In einem Raum, welcher von Materie erfüllt ist, kann nicht gleichzeitig nochmal Materie sein"; doch wird erkennbar, daß es Fälle gibt, die dem zu widersprechen scheinen. Beispielsweise haben wir in einem von Luft erfüllten Raume bekanntlich Sauerstoff- und Stickstoff-Gas, und es scheinen beide Gase gleichzeitig denselben Raum zu erfüllen. Hier ist ein altes Bedenken gegen die gegenseitige Undurchdringlichkeit der Gase, und man bemerkt wohl, daß es nicht ganz leicht war zur heute geläufigen Sicherheit zu kommen, daß die Luftarten ebensogut greifbare Materie sind, wie die flüssigen und die festen Körper.

Das Bedenken wird beseitigt durch eine Vorstellung, ein Bild von aller Materie, das auch aus fast unzähligen anderen Gründen unumgänglich ist zum Verstehen der Natur. Ein erstes und höchst wichtiges Bild, auf das wir hier kommen: Das Bild vom Aufbau der Materie aus gewissen sehr kleinen Teilen, Atome genannt, und zwar so, daß diese Teile immer mehr oder weniger Zwischenräume freilassen (18 u. f.). Diese Atome sind es, denen die Eigenschaft der gegenseitigen Undurchdringlichkeit — innerhalb gewisser Grenzen (27) — zukommt. Gegenseitige Durchdringungen verschiedener Körper, wie der Gase in der Luft, erklären sich damit als nur scheinbar, indem die Atome des einen Körpers, z. B. des Sauerstoffs, in die Zwischenräume der Atome des anderen, z. B. des Stickstoffs, sich begeben können, ohne daß wir davon wegen der Kleinheit der Atome unmittelbar etwas merken. Wir werden auf die Atome und auf die Frage ihrer gegenseitigen Undurchdringlichkeit im sogleich Folgenden noch näher einzugehen haben (18 u. f.).

3. Teilbarkeit.

17. Alle Körper sind teilbar. Es ist das eine alltägliche Erfahrung. Mit Leichtigkeit teilt man mit bewegter Hand die Luft und auch Flüssigkeiten; aber auch die festen Körper können sämtlich zerteilt, zerbrochen werden, auch der härteste, der Diamant.

Etwas Besonderes ist es aber, daß die Zerteilbarkeit bei allen Körpern außerordentlich weitgehend ist. Wasser kann in feinste Nebeltröpfchen zerteilt in der Luft schweben, und wenn es klar verdampft, ist es offenbar noch feiner zerteilt. In der Luft schwebender Rauch zeigt feste Körper in sehr weitgehender Feinzerteilung.

Überall wo unsere Sinne es gestatten, sehr kleine Mengen bestimmter Stoffe noch wahrzunehmen, kann man dieser weitgehenden Zerteilungsmöglichkeit auch quantitativ nachgehen. Der Geruchssinn ist bei gewissen Stoffen besonders geeignet dazu. Es genügt, 1 Liter Luft durch die Nase zu saugen, um 0·001 mm^3 verdampften Äthyläther noch eben mit Sicherheit wahrzunehmen, oder 0·000001 mm^3 Vanillin, oder $2 \cdot 10^{-14}$ mm^3 Merkaptan. Da $2 \cdot 10^{-14}\ mm^3 = (0{\cdot}00003\ mm)^3$, und da in dem Liter Luft mindestens 1 Teilchen Merkaptan vorhanden sein muß um gerochen zu werden, folgt, daß dieser Stoff bei seiner Verdampfung mindestens in Teilchen von 0·00003 mm Dicke oder aber in noch kleinere, deren dann mehrere im Liter sein würden, sich zerteilt haben muß. Zur Erkennung ebenfalls außerordentlich kleiner Teile kommt man nach derselben Schlußweise auch mit Anwendung des Gesichtssinnes bei Farbstoffen, wie z. B. Fluoreszein, die in Wasser gelöst noch in außerordentlich hoher Verdünnung durch Farbwahrnehmung, in diesem Beispielsfalle Fluoreszenz, sich merkbar machen und zwar ohne bei der Zerteilung ihre Eigenschaften dem Licht gegenüber geändert zu haben.

Bemerkenswert sind auch die geringen Dicken, welche feste Körper, fadenförmig gezogen oder flächenhaft ausgebreitet, annehmen können ohne doch den Zusammenhalt zu verlieren. Haare sind 0·1 bis 0·01 mm dick; Platindraht kann bis zu 0·001 mm Dicke hergestellt werden, wenn er durch eine Silberhülle vor Zerreißen geschützt den Drahtzug durchläuft und nachher in Salpetersäure von der Silberhülle befreit wird. Solche Dicken sind mikroskopisch noch gut meßbar; es geht diese Meßbarkeit bis etwa 0·0003 mm (½ Lichtwellenlänge) herab (O 69). Weit dünner kann aber Quarz vor dem Knallgasgebläse ausgezogen werden. Solche Quarzfäden können nur mit Mühe bei günstiger Beleuchtung noch gesehen werden, und doch tragen sie leichte Gegenstände mit aller Sicherheit; sie dienen oft, wie auch jener Platindraht, zu feinsten Aufhängezwecken in Meßvorrichtungen. Goldblatt ist bis zu 0·00007 mm Dicke ausgeschlagen käuflich; es ist dann grün durchsichtig und hält doch noch gut zusammen. Auch diese Dicke wäre nicht mehr mikroskopisch ausmeßbar; man berechnet sie aber leicht, indem man das Volum eines solchen Goldblattes durch Auswägung ermittelt (14, 70) und das Volum durch die ebenfalls leicht zu messende Fläche des Blattes teilt. Durch besondere Kunstgriffe, ähnlich dem beim Platindraht erwähnten, hat man auch noch dünnere zusammenhängende, löcherfreie, mit Vorsicht frei ausspannbare Schichten verschiedener Metalle herzustellen gelernt; sie sind klar durchsichtig.

18. A t o m e. — Sicher ist es und konnte es schon vor langer Zeit nach solchen Beispielen, besonders nach dem Beispiel der Verdampfung sein, daß die Teilbarkeit der Materie bis unter die Grenze der Sichtbarkeit der Teile herabgeht. Eine besondere Frage war es aber auch lange schon, ob diese Teilbarkeit ohne weiteres bis ins Unendliche weitergehe oder ob vielleicht bei genügend weit fortgesetzter Teilung etwas Besonderes auftritt; etwa wie wenn ein Haus abgerissen wird und man darauf kommt, daß es aus Ziegelsteinen, aus vorge-

gebenen Bestandteilen, aufgebaut war, daß das Gemäuer in seinem Inneren nicht gleichförmig den Raum erfüllt, sondern daß es Gefüge (Struktur) besitzt. Ganz so ist es bei der Materie. Heute bereits geradezu unzählige Gründe sprechen dafür, daß alle Materie aus wohlbestimmten, vorgegebenen Bestandteilen aufgebaut ist: den Atomen.

Wir schicken hier zur Übersicht voraus, daß es rund 100 verschiedene Atomsorten gibt, aus denen alles Materielle aufgebaut ist: alle festen, flüssigen, gasförmigen Körper auf Erden nicht nur, sondern — wie Spektralanalyse lehrt (O 91) — auch bis zu den fernsten Fixsternen und Nebeln des Himmels. Auf Feinheiten in der Unterscheidung von Atomen und auf alle Sonderkenntnisse von ihnen können wir erst spät eingehen (E 520 u. f.). Hier kommt es darauf an, das Bild vom atomistischen Aufbau der Materie vorerst in den großen Zügen zu entwickeln.

19. Elemente (Grundstoffe). — Einen Körper, der nur aus einer einzigen Atomsorte aufgebaut ist, nennen wir ein („chemisches") Element oder einen Grundstoff. Es gibt also rund 100 (genauer nach heutiger Kenntnis 92) verschiedene Elemente; jedes hat seinen Namen und sein Buchstabenzeichen bis auf einige wenige, die wegen ihres sehr spärlichen Vorkommens auf der Erdoberfläche erst in dieser Zeit noch hinzuentdeckt werden. Die w. u. folgende Atomtabelle (23) zeigt eine Zusammenstellung dieser Elemente; sie wird uns in ihren Einzelheiten immer noch weiter beschäftigen.

20. Chemische Erfahrung. — Die ganze Erfahrung, auf welcher das Bild vom Aufbau aller Materie aus den Atomen ruht, können wir in ihrer Fülle nur allmählich vorbringen; sie erstreckt sich durch alle Teile der Physik. Jede Erscheinungsgruppe, deren Verstehen durch dieses Bild bis ins Einzelne ermöglicht wurde und die sonst unbegreiflich bliebe, wird neuer Beweis für das Zutreffen des Bildes sein. Eine der Erfahrungsgruppen und der zugehörige Gedankenweg zu dem Bilde sei aber sogleich an einem Beispiel hier vorgeführt. Wir kommen dabei zu den ältesten Anhaltspunkten, die schon in früher Zeit aus einer dem Altertum entstammenden Hypothese, die ihren geringen Wert mit viel anderen Hypothesen teilte, die Anfänge der heutigen Kenntnis von den Atomen lieferten.

Wir können dabei an dem vorher betrachteten Beispielsfall einer „chemischen Erscheinung" anknüpfen (Einl. 3), indem wir das verbrannte Magnesium betrachten und uns dabei folgende Gedanken machen: 1. Das Magnesiummetall sowohl als der Sauerstoff sind aus dem „Magnesiumoxyd" genannten, weißen Pulver jederzeit abscheidbar; sie müssen also beide darin wirklich vorhanden sein, obgleich man an dem Pulver unmittelbar nichts von ihnen wahrnimmt. 2. Sie können aber, eben wegen der Unwahrnehmbarkeit, wohl nur im Zustand außerordentlich feiner Verteilung in dem Pulver sein, das in seinem ganzen Volum so einheitliche Beschaffenheit zeigt. 3. Die beiden Bestandteile können aber nicht als feinste Teile beliebiger Größe in dem Pulver sein; denn quantitative Untersuchung desselben zeigte, daß stets, in jeder beliebigen Menge desselben, auf 3 Gewichtsteile Magnesium 2 Gewichtsteile Sauerstoff kommen, niemals ein anderes Verhältnis. Das könnte wohl so sein, wenn Magnesium und Sauerstoff in Teilchen vorhanden sind, deren Gewichte, wie sehr klein sie auch seien, durchweg wie 3 zu 2 sich verhalten und wenn diese

Teilchen in dem weißen Pulver fest gruppiert sind, so daß in jeder Gruppe stets ein solches Magnesiumteilchen mit einem der Sauerstoffteilchen gepaart ist und bleibt. Sehen wir das weiße Pulver als eine Anhäufung solcher Gruppen an, so verstehen wir einen guten Teil seines „chemischen" Verhaltens und zwar auch quantitativ.

Eben die hier auftretenden kleinen Teile — bestimmten Gewichts — der weiter nicht zerlegbaren Stoffe, wie Magnesium, Sauerstoff, nennen wir die Atome dieser Stoffe.

Solche Erfahrung hat sich bei quantitativer Untersuchung, bei Zerlegung (Analyse) und Zusammensetzung (Synthese) sehr vieler Stoffe fortdauernd zunehmend in gleicher Weise den Chemikern geboten, und diese Erfahrung hat allmählich sowohl die der Zerlegung widerstehenden Elemente (Grundstoffe) als auch die Gewichtsverhältnisse ihrer Atome kennen gelehrt.

21. Moleküle. — Eine beisammenbleibende Gruppe von Atomen in bestimmten Anzahlen, wie wir sie beim Magnesiumoxyd fanden, wird ein Molekül oder eine Molekel genannt.

Ein Körper, der aus lauter gleichen Molekülen besteht, wird eine (reine) chemische Verbindung oder kurz Verbindung genannt.

Sind verschiedenartige Atome oder Moleküle ohne feste Gruppierung und daher auch nicht in festem, unabänderlichem Mengenverhältnis nebeneinander aufgehäuft, so haben wir ein Gemisch oder Gemenge. Beispielsweise ist die atmosphärische Luft ein Gemenge von Sauerstoff und Stickstoff.

Bei Gemischen sind meist die Eigenschaften der Bestandteile unmittelbar oder in einfacher Weise erkennbar. Bei der chemischen Verbindung ist dies nicht der Fall, wie wir schon am Beispiel des Magnesiumoxyds bemerkten. Der Grund von letzterem liegt nicht nur in der äußerst feinen Verteilung, sondern auch in Veränderungen, welche die Atome bei ihrer Vereinigung — „Bindung" — zum Molekül einander antun. Dies wurde erst sehr spät klar; wir kommen an geeigneter Stelle darauf zurück (E 542). Die Atome sind in den Molekülen sehr dicht zusammengelagert (24).

22. Gesetz der „konstanten und multiplen Proportionen". — Bei der chemischen Verbindung zweier oder mehrerer Elemente sind mehrere Mengenverhältnisse möglich, jedoch — im Gegensatz zum Gemisch — nur in bestimmten, unveränderlich eingehaltenen Abstufungen, entsprechend dem Vorhandensein von 1 oder 2 oder 3, oder irgendeiner anderen ganzen Zahl von Atomen jedes der Grundstoffe im Molekül. Eben diese, bei der quantitativen Untersuchung der Verbindungen gefundene Gesetzmäßigkeit war auch eine der ersten besonderen Stützen für die Erkenntnis vom Dasein der Atome als nicht in Bruchstücken sondern nur in ganzen Anzahlen vorkommenden Urbestandteilen aller materiellen Körper (Dalton, 1808).

Um eine chemische Verbindung in einfachster Weise zu kennzeichnen, bedarf es nur eines geeigneten Bildes des Moleküls derselben. Solche Molekülbilder sind die „chemischen Formeln" (Berzelius), wie z. B. „MgO" für das Magnesiumoxyd, wobei „Mg" 1 Atom Magnesium, „O" 1 Atom Sauerstoff darstellt. H_2O ist das Wassermolekül mit H als Zeichen des Wasserstoffatoms; es enthält 2 Atome Wasserstoff mit 1 Atom Sauerstoff vereinigt. H_2O_2 ist das Molekül

des Wasserstoffsuperoxyds, doppelt soviel Sauerstoff als das Wassermolekül enthaltend, ein Beispiel „multipler Proportion".

23. Atomgewichte. — Aus der quantitativen Untersuchung vieler chemischer Verbindungen erhielt man allmählich Angaben über die relativen Gewichte der Atome der Grundstoffe, wie beispielsweise die Angabe 3:2 für Magnesium : Sauerstoff (20). Da das Wasserstoffatom als das leichteste sich zeigte, nahm man dessen Gewicht als Einheit für alle Atomgewichte[1]); es wird dann beispielsweise das Atomgewicht von Magnesium 24 und von Sauerstoff 16, was dem Verhältnis 3:2 entspricht. Eine Schwierigkeit bildete dabei die Möglichkeit multipler Proportionen (22) mit der Fraglichkeit der Anzahl der Atome in den Molekülen der untersuchten Verbindungen; diese war zu überwinden, indem man das Atomgewicht als die kleinste Gewichtsmenge des betreffenden Elementes suchte, die in einem Molekül seiner Verbindungen je anzutreffen ist und deren ganzzahlige Vielfache alle anderen Gewichtsmengen sind, die in den anderen Molekülen vorkommen. Da es nur auf relative Gewichte ankommt, kann man dabei immer in beliebig großen Gewichtseinheiten rechnen, so daß z. B. 1 gr Wasserstoff an Stelle eines Atoms Wasserstoff tritt, was darauf hinauskommt, daß man an Stelle einzelner Atome oder Moleküle deren so viele zusammengenommen untersucht als Wasserstoffatome in 1 gr Wasserstoff sind.

Es wurde demnach zur Ermittelung der Atomgewichte die quantitative Analyse oder Synthese möglichst vieler Verbindungen jedes einzelnen Elements und außerdem die Ermittelung der Gewichte der Moleküle — „Molekulargewichte" — der Verbindungen erforderlich, letztere ebenfalls mit dem Gewicht des Wasserstoffatoms als Einheit. Diese umfangreiche Aufgabe wurde, zusammen mit der allmählichen Feststellung der verschiedenen Elemente überhaupt, mit allmählich steigender Sicherheit in der Zeit von Dalton bis Bunsen gelöst. Auf anderweitige Wege der Atomgewichtsbestimmung, die zu Hilfe kamen, gehen wir in der Wärmelehre ein (W 125), ebenso auch auf die besonderen Wege zur Ermittelung der Molekulargewichte (W 83).

In der Atomtabelle (s. S.) sind sämtliche Atome nach steigendem Gewicht von oben nach unten geordnet; das Gewicht ist am linken Rand der Tabelle zu sehen. Die Anordnung in verschiedene Vertikalreihen ist so getroffen, daß chemisch — d. h. mit ihren Eigenschaften in bezug auf Bildung chemischer Verbindungen — analoge, sich ähnlich verhaltende Elemente senkrecht untereinanderkommen. Man nennt diese Anordnung das „natürliche System der Elemente"[2]).

Jedes Element hat in dieser Anordnung auch eine „Ordnungszahl" nach steigendem Atomgewicht, von Wasserstoff mit 1 angefangen bis zum Uran mit 92. Diese Ordnungszahlen sind in der Tabelle klein bei jedem Elementzeichen vermerkt; die 3 leeren Plätze mit den Ordnungszahlen 61, 85 und 87 gehören noch nicht festgestellten Elementen zu. Nicht unwahrscheinlich ist es, daß das Innere der größten Himmelskörper Elemente mit noch höheren Ordnungszahlen als 92 und höheren Atomgewichten als 240 enthält (vgl. 305).

---

[1]) Man findet — aus nebensächlichen Gründen — auch Atomtabellen mit O = 16·000, wobei dann H = 1·008 wird.

[2]) Über die Valenzen s. E 192, Bd. III und 570, Bd. IV.

Atomtabelle; natürliches System der Elemente.

Valenz / Gewicht	0	+ 1, 2, 3	+ 2, 1	± 3, 1	± 4, 2	± 3, 5	∓ 2, 3, 4, 6	∓ 1, 3, 5, 7	+ 1, 2, 3, 4	8	−
0	2 He									1 H	
10		3 Li	4 Be	5 B	6 C	7 N					
20	10 Ne	11 Na	12 Mg				8 O	9 F			
30				13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl			
40	18 Ar	19 K	20 Ca	21 Sc							
50					22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe		
60		29 Cu	30 Zn							27 Co	28 Ni
70				31 Ga	32 Ge	33 As					
80	36 Kr	37 Rb					34 Se	35 Br			
90			38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb					
100							42 Mo	43 Ms	44 Ru	45 Rh	
110		47 Ag	48 Cd	49 In							46 Pd
120					50 Sn	51 Sb					
130	54 X	55 Cs					52 Te	53 J			
140			56 Ba	57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61			
150		62 Sm	63 Eu								
160				64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho				
170		69 Tu	70 Yb	71 Cp				68 Er			
180					72 Hf	73 Ta	74 W				
190		79 Au						75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt
200			80 Hg	81 Tl							
210					82 Pb	83 Bi	84 Po	85			
220	86 Em	87									
230			88 Ra	89 Ac	90 Th	91 Pa					
240							92 Ur				

Siehe Abb. 122 Bd. IV. (zu 210–240)

Aus den relativen Atomgewichten folgen die absoluten — in gewöhnlicher Gewichtseinheit — sobald nur ein einziges Atomgewicht absolut bekannt ist, wozu erst später die Wege gefunden wurden (W 102, 104). Man kann sich für die meisten Zwecke mit der Betrachtung der relativen Atomgewichte begnügen.

24. Später als die relativen Gewichte wurden auch die Größenabmessungen der Atome und Moleküle ermittelbar (W 106). Wir stellen hier nur einige Ergebnisse zusammen (Tab. 1), wobei als Einheit 10^{-8} cm oder das 10mal größere $\mu\mu$ gewählt ist[1]). Man sieht erstens, daß die Atomdurchmesser in der Tat noch viel kleiner — etwa 100mal kleiner — sind als die kleinsten Teile, Faden- oder Schicht-Dicken, auf die wir vorher kamen (17). Sie liegen auch weit unter der Grenze mikroskopischer Ausmeßbarkeit (O 69), etwa 1/1000 derselben betragend. Man sieht außerdem, daß Atome sehr verschiedenen Gewichts doch keine starken Größenunterschiede haben. Die Moleküle betreffend sieht man, daß sie im allgemeinen nicht bedeutend größer sind als Atome, selbst wenn sie aus einem Dutzend Atomen bestehen. Die Atome sind also bei ihrer Bindung in den Molekülen mehr oder weniger ineinander geschoben. Daß sie dabei dennoch gesonderte Beweglichkeit innerhalb des Moleküls bewahren, dies zeigen die Erscheinungen der Wärme (W 121).

Tab. 1. **Ungefähre Atom- und Molekül-Durchmesser.**

Atome	Rel. Gewicht (H = 1)	Durchmesser	
Helium He	4	$1{\cdot}9 \cdot 10^{-8}$ cm	= 0·19 $\mu\mu$
Kohlenstoff* C	12	1·8 „	0·18 „
Lithium* Li	7	3 „	0·3 „
Strontium* Sr	87·6	4 „	0·4 „
Zäsium* Cs	132·8	5 „	0·5 „
Moleküle			
Wasserstoffgas H_2	2	$2{\cdot}0 \cdot 10^{-8}$ cm	= 0·2 $\mu\mu$
Sauerstoffgas O_2	32	2·8 „	0·28 „
Stickstoffgas N_2	28	3·1 „	0·31 „
Wasserdampf H_2O	18	2·6 „	0·26 „
Benzoldampf C_6H_6	78	4 „	0·4 „
Strontiumoxyd* SrO	103·6	5 „	0·5 „

Ermittelungsweise s. W 102—106 (* im festen Zustand).

25. Das in der Tab. 1 mit angeführte Beispiel des Wasserstoffgasmoleküls, H_2, zeigt, daß auch bei Elementen nicht nur Atome, sondern auch Moleküle zu betrachten sind; denn auch gleiche Atome gruppieren sich meist zu fest zusammenbleibenden Molekülen; so besteht das Wasserstoffgasmolekül aus 2 Wasserstoffatomen.

[1]) $\mu\mu$ oder mμ ist das oft gebrauchte Zeichen für das Milliontel-Millimeter.

Manchmal sind die Moleküle eines und desselben Stoffes in den verschiedenen Aggregatzuständen desselben verschieden groß. So ist z. B. H_2O das Wasserdampfmolekül, während im flüssigen Wasser sehr viele doppelt so große Moleküle, H_4O_2, vorkommen.

Die besonderen Erfahrungen, die dies alles schließen ließen, betrachten wir in der Wärmelehre (W 83 u. f.).

26. Das Bild vom Aufbau aller Materie aus den Atomen und deren Vereinigungen, den Molekülen, eines der wichtigsten unter allen, zu denen die Naturforschung gelangt ist, ist bei der Kleinheit der Atome nur in vorgestellter, genügender Vergrößerung benutzbar, was aber nicht im mindesten hinderlich ist. Man stelle sich ein Kubikmillimeter irgendwelcher Materie in 5-millionenfacher Längenvergrößerung vor. Man hat dann einen Würfel von 5 km Kantenlänge, also etwa 1 Stunde entlang zu gehen und so hoch wie die Alpengipfel. Dieser Würfel erscheint dann erfüllt von etwa hanfkorngroßen Einzelgebilden, den Atomen oder Molekülen des betreffenden Stoffes, die aber immer noch Zwischenräume frei lassen, innerhalb deren sie auch dauernd Bewegungen ausführen, wie die Erscheinungen der Wärme zeigen. Diese etwa hanfkorngroßen Moleküle vertragen nach heutiger Kenntnis noch weitere Vergrößerung, die Einzelheiten in ihnen zeigt. Man findet in den Atomen mit den zu ihrer Untersuchung bereits vorhandenen Mitteln wieder feinere Bestandteile, nämlich die beiden Elektrizitäten, die an sich nur eine äußerst geringe Raumerfüllung haben und die daher innerhalb des Atomraumes noch sehr viel freie Zwischenräume lassen und viel Bewegungsmöglichkeit übrig behalten. So ist jedes der kleinen Atome wieder eine Welt für sich, deren weitere Erforschungsmöglichkeiten später zu betrachten sind (E 520 u. f.).

Eigentümlich ist hiernach die Verteilung der Materie im Gesamtraum der Welt. Da sind im Großen die Himmelskörper, Sonnen und Planeten in zahllosen Gruppen mit weiten, von Materie freien Zwischenräumen, und diese großen Einzelanhäufungen von Materie bestehen aus den kleinen Molekülen und Atomen, die ihrerseits in ihrem Inneren in nochmals kleinerem Maßstabe wieder feinere Bestandteile mit viel Zwischenräumen zeigen.

Dieses Bild, die Vorstellung vom Aufbau aller Materie aus den Atomen, mit dem geschilderten Inhalt des Begriffes „Atom", ist heute schon lange als ein Stück gut festgestellter Wirklichkeitserkenntnis zu betrachten. Denn das Bild hat bereits unzählige Proben an der Wirklichkeit so bestanden, daß nicht nur niemals Widersprüche mit Tatsachen aufgetreten sind, sondern daß alle neu hinzukommenden Erkenntnisse immer nur weitere Verfeinerungen hinzugefügt haben, die der mit Dalton im Groben begonnenen Haupterkenntnis aufs Einfachste sich angegliedert haben. Besonders die Erscheinungen der Wärme waren aufschlußreich für die Verfeinerung und wichtig für die Erprobung des Bildes, und umgekehrt hat das Bild gleichzeitig zum Verstehen sämtlicher, lange unergründlich erschienenen Wärmeerscheinungen geführt. Nicht weniger entscheidend ist es, daß sämtliche erfolgreiche Überlegungen aus den letzten Jahrzehnten der Chemie, mit dem Ergebnis der Herstellung einer Unzahl von neuartigen Stoffen — Atomgruppierungen —, allein nur mittels der Kenntnis von den Atomen als den Bausteinen aller Stoffe möglich waren.

Geht das Bild auch weit über sinnlich unmittelbar Wahrnehmbares hinaus, so sind wir von seinem Zutreffen doch nicht weniger gut überzeugt als bei Tatsachen, die unmittelbarer Nachprüfung durch die Sinne zugänglich sind. Es ist mit den Atomen etwa wie mit der rotierenden Erdkugel, die auch noch kein Auge unmittelbar gesehen hat, wie es von außerhalb der Erde her möglich wäre, und von deren Gestalt und Bewegung wir doch — auch hier auf Umwegen — genügend überzeugende Kenntnis besitzen.

27. Grenzen der Undurchdringlichkeit. — Bei der angedeuteten Kenntnis vom Atominneren (26) mag die gegenseitige Undurchdringlichkeit der Atome, auf welche wir die Undurchdringlichkeit der Materie zurückgeführt haben (16), verwunderlich erscheinen. Tatsache ist aber, daß diese Undurchdringlichkeit im allgemeinen besteht und daß die in Tab. 1 in Beispielsfällen zusammengestellten Atomdurchmesser als Durchmesser von Räumen wirksam sind, in die für gewöhnlich ein anderes Atom mit dem ihm ebenso eigenen Raum nicht eindringt (299, 305, W 90 u. f.). Diese Undurchdringlichkeit hat aber ihre Grenzen. Nicht nur daß Atome, die einander zu Molekülen zu binden vermögen, mehr oder weniger so ineinander schlüpfen, daß das Molekül kaum mehr Raum einnimmt als eines seiner Atome einzeln (24), sondern es ist festgestellt, daß freie Elementarquanten der negativen Elektrizität (Elektronen) bei geeigneter Geschwindigkeit frei die Atomräume passieren können (E 528). Außerdem kommt es bei äußerst schnell bewegten Atomen — den positiven Strahlen — vor, daß sie andere Atome durchsetzen (E 550, 575). Einen Übergang dazu hat schon die Untersuchung der Wärmebewegung bei den Gasen darin gezeigt, daß zusammenstoßende Atome (Moleküle) bei steigenden Geschwindigkeiten zu größeren Annäherungen kommen, als es ihren für geringe Geschwindigkeiten geltenden Durchmessern (Tab. 1) entspricht (W 98).

28. Als eine weitere Eigenschaft aller Materie wird

4. Die Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit,

kurz die Veränderlichkeit der Raumeinnahme genannt.

Äußere Kräfte — Zug und Druck —, so wie auch Temperaturänderung verändern das Volum aller Körper, was Gegenstand besonderer Untersuchung ist (246 u. f., W 8 u. f.). Diese Veränderungen betreffen im allgemeinen nur die Zwischenräume der Moleküle, nicht die letzteren selbst. Diese Zwischenräume sind nur im gasförmigen Aggregatzustand sehr groß, daher hier auch die Volumveränderlichkeit sehr groß ist. Bei den meisten festen Körpern sind die Zwischenräume so klein, daß fremde Moleküle oder Atome, selbst die kleinen des Wasserstoffs nicht durchpassieren können. Glasgefäße sind gänzlich gasdicht, ebenso auch Metallgefäße, wenn sie keine Risse und Poren haben; bei Glühhitze jedoch erweitern sich die Zwischenräume bei den meisten Metallen so sehr, daß sie mindestens für Wasserstoff durchlässig werden. Einschlüsse von flüssiger Kohlensäure, die man in Gesteinen findet, sind vortreffliche Beweise der Undurchlässigkeit des Gesteins für Kohlensäure-Moleküle; denn der Druck in diesen Einschlüssen ist hoch und die Dauer ihres Bestehenbleibens geht wohl sicher über viele Hunderttausende von Jahren.

29. Starke Volumveränderungen beobachtet man fast immer bei Umbildungen oder bei Neubildung von Molekülen, bei chemischen Umsetzungen, wobei nicht nur die Zwischenräume der Atome sich ändern (vgl. 24, 27).

Selbst auch bloße Mischung kann Volumänderung hervorbringen und zwar Volumverminderung („Kontraktion"), wenn die gemischten Moleküle Anziehungskräfte aufeinander ausüben. So tritt beim Mischen von Alkohol und Wasser leicht merkliche Volumverminderung ein. Alkoholmoleküle und Wassermoleküle bilden Gruppen miteinander, jedoch ohne in festem Verhältnis der Anzahlen vereinigt zu bleiben. Solche wechselnde Zusammenlagerung verschiedener Moleküle zu „komplexen Molekülen" tritt auch bei Auflösung fester Körper in Flüssigkeiten, ebenso auch bei Absorption von Gasen in Flüssigkeiten ein (E 199), stets unter Verminderung des Gesamtvolums.

5. Beweglichkeit.

30. Diese Eigenschaft will sagen, daß die verschiedenen Teile der Materie ihre Abstände voneinander im Raume ändern können, was eine alltägliche Erfahrungstatsache ist. Bei der Erfassung solcher räumlicher Änderungen kommt eine neue Grundvorstellung zu Hilfe, die wir nun zu betrachten haben: die Zeit. Bisher behandelten wir in der Hauptsache nur das räumliche Nebeneinander; jetzt wollen wir das zeitliche Nacheinander untersuchen.

31. Die Zeit ist das Mittel, die Aufeinanderfolge der Veränderungen, die wir in der Welt beobachten, in unserem Geiste abzubilden. Sie ist — wie der Raum (3) — ein der Beobachtung der Außenwelt, der Erfahrung (Einl. 6)[1]) entnommener Begriff (Einl. 9), dienlich zur maßmäßigen Abbildung der im Raume zu beobachtenden Veränderungen.

Die Erfahrung ergibt die Zeit als eine eindimensionale Größe. Wir können die Zeit, um sie zu untersuchen, mittels des Raumes abbilden. Haben wir eine gerade Linie, unbegrenzt — unendlich — wie sie, soviel wir wissen, an beiden Seiten ist, so kann jeder Punkt dieser Linie einen kleinsten Teil der Zeit — einen Augenblick — darstellen. Stellt der eben mitten vor uns befindliche Punkt der Linie das Jetzt dar, so haben an der ganzen einen Seite der Linie alle Zeiten Platz, die es jemals vorher gegeben hat — die ganze Vergangenheit —, und an der anderen Seite der Linie ist Platz für alle zukünftigen Zeiten. Andere Zeiten, als die auf dieser einen Linie abbildbar sind, hat es nie gegeben und wird es auch — aller vorhandenen Erfahrung nach — nie geben; dies ist es, was das Wort von der Eindimensionalität der Zeit ausdrücken will.

32. Zeiteinheit. — Nun kommt es wieder, wie beim Raume so auch bei der Zeit, auf das Maßmäßige an. Wir müssen bestimmte Teile — Abschnitte — der Zeit messen können. Dazu ist — wie bei der Raummessung (5) — eine Einheit erforderlich, und sie kann wieder nur von gleicher Art sein wie die zu messende Größe: sie muß ein bestimmter Zeitteil sein. Derselbe ist zunächst, wie bei jeder Grundeinheit (12) mit mehr oder weniger Willkür auszuwählen, um dann so gut wie möglich unverändert festgehalten zu werden.

---

[1]) Zu Kants Erörterungen über die Zeit vgl. die entsprechende Note zum Raum (3).

Die Wahl der Zeiteinheit ist schon von alters her gut getroffen worden; es ist die Zeit der einmaligen Umdrehung der Erde um ihre Achse: der Tag mit seinen bekannten Unterabteilungen, der Stunde, Minute und Sekunde. Da die Erddrehung als scheinbarer Lauf der Gestirne sichtbar wird, kann diese Zeiteinheit vom Himmel abgenommen werden als die Zeit von einem Höchststand eines Fixsterns bis zum nächsten; es ist dies der „Sterntag".

Jedoch die Tätigkeiten des Menschen richten sich nicht nach dem Lauf der Sterne, sondern nach dem der Sonne; daher die von jeher geltende Bezugnahme auf diese. Die Sonne bleibt in ihrer scheinbaren täglichen Bewegung unter den Sternen zurück, so daß die Zeit von einem Höchststand der Sonne bis zum nächsten — der „Sonnentag" — länger ist als der Sterntag. Das scheinbare Zurückbleiben der Sonne kommt daher, daß die Erde nicht nur um ihre Achse sondern auch um die Sonne sich bewegt, und da letzteres in rund 365 Tagen einmal erfolgt, ist der Sonnentag um rund $^1/_{365}$ Tag oder genauer um 3 Min. 55,9 Sek. Sonnenzeit länger als der Sterntag. Dabei erfolgt jenes Zurückbleiben der Sonne ungleichmäßig, entsprechend der wechselnden Geschwindigkeit der Erde in ihrer jährlichen Bahn; es kann daher ein brauchbarer, stets gleichlanger Sonnentag nicht unmittelbar von der Sonne abgenommen werden, wohl aber von den Sternen, wobei der Sterntag um jene 3 Min. 55·9 Sek. zu verlängern ist. Diese Abnahme der Zeiteinheit von den Gestirnen wird immer wieder von den Sternwarten besorgt; denn die Zeiteinheit kann — im Gegensatz zur Längeneinheit — nicht für lange hinaus aufbewahrt werden, weil dazu keine Uhr gut genug wäre. So werden die Uhren der Sternwarten stets wieder nach der Erddrehung richtiggestellt, und danach richten sich alle anderen Uhren im Lande. Der in dieser Weise mit Rücksicht auf die Sonne etwas abgeänderte Sterntag wird auch „Tag mittlerer Sonnenzeit" genannt, weil er — wie man auch sagen kann — nach einer gedachten „mittleren Sonne" sich richtet, die gleichmäßig in einem Jahre um einen Umlauf zurückbleiben würde.

Dieser Tag mittlerer Sonnenzeit ist die tatsächlich allgemein gebrauchte Zeiteinheit. Sie ist eine neue Grundeinheit, die zweite im Bisherigen, neben der Längeneinheit.

Von großer Wichtigkeit ist — wie bei jeder Einheit — die Frage, ob diese Zeiteinheit, d. h. ob die Umdrehungszeit der Erde unveränderlich ist. Diese Frage kann nur durch dauernde Vergleichung der Erdbewegung mit möglichst vielen anderen Bewegungen beantwortet werden, die man als unbeeinflußt gleichbleibend oder doch in ihrem Verlaufe als genügend bekannt anzusehen berechtigt ist. Es ist in den Jahrhunderten, während welcher alle Himmelsbewegungen mit stets steigender Genauigkeit verfolgt werden, keine Änderung der Tageslänge aufgetreten, die mehr als ein 10-milliontel Tag betrüge, was eine außerordentliche Konstanz bedeutet. Es sind allerdings Anzeichen für ein — wohl etwas ungleichmäßiges — Zurückbleiben der Erddrehung um den sehr geringen Betrag von einigen Zehntelsekunden im Jahr vorhanden. Wir werden später zwei Einflüsse betrachten, deren einer die Erddrehung stets verlangsamen muß (225), während der andere sie (in abnehmendem Maße) beschleunigen muß (233). Von diesen einander entgegenwirkenden Einflüssen scheint der erstere schon ein wenig zum Überwiegen zu kommen.

Man bemerkt, daß man bei Festhaltung der Zeiteinheit ganz auf die Verfüg-

barkeit eines unbeeinflußt immer in gleicher Weise ablaufenden Bewegungsvorganges angewiesen ist. Die Drehung der frei schwebenden Erde ist sehr nahezu ein solcher Bewegungsvorgang, und darin besteht die Güte der schon so alten Zeiteinheit. Mit ihrer Hilfe war es möglich, die einfachen Gesetze sämtlicher Bewegungsvorgänge der Materie zu erkennen, und nach diesen Gesetzen wurde schließlich auch die Bewegung der Erde beurteilbar.

33. Uhren. — Zur kurzfristigen Aufbewahrung der Zeiteinheit, zur Herstellung von deren Unterabteilungen und zum Zeitmessen dienen die Uhren. Gute Uhren, die Pendeluhren und Chronometer, gibt es erst seit Huygens (1673). Galilei benutzte noch eine Wasseruhr, indem er Zeitlängen nach abgelaufenen Wassermengen maß (135); doch hatte er durch das Studium der Pendelbewegung (169) schon die Grundlage zur Herstellung der heutigen Uhren geliefert. Eine Pendeluhr ist eine Verbindung des durch Gewicht oder Federkraft getriebenen Lauf- und Zeigerwerks mit dem Pendel. Die Verbindung, auch „Hemmung" genannt, hat zwei Zwecke zu erfüllen: Erstens läßt sie das Laufwerk mit den Zeigern nur nach dem Takte der Pendelschwingungen vorangehen, so daß es im Grunde ein Zählwerk für die Pendelschwingungen wird, und zweitens erteilt es dem Pendel bei jeder Schwingung einen kleinen Stoß, der das Pendel dauernd in Gang hält, indem er den Reibungsverlust ausgleicht.

Das Wesentliche ist, daß die Schwingungsdauer des Pendels als unveränderlich gleichbleibend angenommen wird, indem man in der Schwingung einen unbeeinflußt stets in gleicher Weise sich wiederholenden Bewegungsvorgang sieht. Wir kommen auf alles, was hierzu zu bemerken ist, an geeigneten Stellen noch zurück (166, 167, 175, 176, W 10).

Das Schwerependel der Standuhren kann auch durch das elastische Pendel (163) — die Unruhe — der tragbaren Uhren und Schiffschronometer ersetzt sein.

Für genaueste Zeitmessungen kommen die Quarzuhren zu Hilfe (A 102, E 477). Sie geben auch zum ersten Mal ein Mittel, die Pendeluhren außer durch Vergleichung mit der Erddrehung, bei Abnahme der Zeit von den Sternen, noch in anderer Weise unter Kontrolle zu halten, nämlich durch Vergleichung mit dem schwingenden Quarz. Die Zuhilfenahme dieses besonders vorteilhaft vor Beeinflussung zu bewahrenden Schwingungsvorganges erlaubt so auch erneute, verfeinerte Untersuchung der Frage nach der Gleichmäßigkeit der Erddrehung.

34. Zeitmessung. — Mittels des Sekundenzeigers der Uhren mißt man leicht Zeiten bis auf ganze oder auch geschätzte Zehntel-Sekunden. Um Bruchteile von Sekunden oder überhaupt kürzere Zeiten zu messen, bedient man sich schneller Hilfsbewegungen, z. B. eines Papierstreifens oder einer Rußtrommel, auf welche Elektromagnete oder elektrische Funken zu Anfang und zu Ende der zu messenden Zeit Marken machen können. Der Abstand der Marken, verglichen mit dem Abstand von Sekundenmarken, die ein Uhrpendel geben kann, bemißt dabei die Zeit. Für Tausendstel Sekunden und noch kürzere Zeiten gibt es allerlei Umwege, stets beruhend auf schnell und der Zeit proportional ablaufenden Vorgängen.

35. Bewegungslehre (Kinematik). — So wie aus der Betrachtung des Raumes für sich allein die Wissenschaft der Geometrie (Raumlehre) hervor-

geht (3), so ergibt sich aus der Betrachtung von Raum und Zeit zusammen die Kinematik (Phoronomie) oder reine Bewegungslehre, deren für die Naturforschung höchst wesentliche Grundlagen von Galilei stammen.

Es genügt uns, um diese Grundlagen zu entwickeln, die Betrachtung der geradlinigen Bewegung eines Punktes. Der Punkt kann Mittelpunkt eines in Bewegung befindlichen Körpers sein; er kann aber auch die Lage, den Ort irgendeines Zustandes im Raume bezeichnen.

36. Der einfachste Fall ist der der gleichförmigen Bewegung. Dieselbe ist nach bereits begründeter Zeitmessung dadurch definiert, daß bei ihr in gleichen Zeiten gleiche Wege durchlaufen werden.

37. Geschwindigkeit. — Die Betrachtung der gleichförmigen Bewegung liefert den für die Bewegungslehre grundlegenden Begriff der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit ist definiert als das Verhältnis des vom betrachteten Punkte zurückgelegten Weges zur Zeit, in welcher der Weg zurückgelegt wurde,

$$\text{Geschwindigkeit} = \frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} \quad \text{oder, in oft gebrauchten Zeichen,} \quad v = \frac{s}{t}. \qquad 37)$$

Es ist ersichtlich, daß man die gleichförmige Bewegung auch als Bewegung mit unveränderlicher Geschwindigkeit bezeichnen kann und daß eine solche Bewegung bei gegebener Bahn und Anfangslage vollkommen durch die Angabe der Geschwindigkeit beschrieben und festgelegt ist.

38. Zu einer Geschwindigkeitsmessung gehört nach Definition eine Längenmessung und eine Zeitmessung. Eine besondere, neu zu wählende Einheit für Geschwindigkeiten ist nicht erforderlich, sondern die Geschwindigkeitseinheit ergibt sich von selbst als diejenige Geschwindigkeit, bei welcher in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurückgelegt wird. Wir haben hier wieder eine abgeleitete Einheit (12). Auch das Zeichen für diese Einheit, cm/sek, ergibt sich bei Berechnung der Geschwindigkeit von selbst.

Es ist für die Geschwindigkeitsmessung bei der gleichförmigen Bewegung ganz gleichgültig — von Genauigkeitsfragen abgesehen —, wie lang der zur Messung gewählte Weg ist, wenn nur bei der Berechnung stets richtig die zum Weg gehörige Zeit in den Nenner gesetzt wird; denn die Geschwindigkeit ist bei dieser Bewegung überall gleich.

39. Unendlich kleine Größen. — Im Besonderen kann die Geschwindigkeit auch auf unendlich kleinem Wegstück berechnet werden. Unendlich klein heißt hierbei, wie in allen Fällen: kleiner als jede beliebig kleine angebbare Größe. Die zugehörige Zeit wird dann auch unendlich klein; das Verhältnis der beiden unendlich kleinen Größen, Weg und Zeit, bleibt hierbei aber immer gleich einer und derselben endlichen Größe, nämlich der für alle Wegstrecken gleichen Geschwindigkeit.

Es ist dies ein einfacher Beispielsfall für die in der gesamten Naturforschung so wichtige Rechnung mit unendlich kleinen Größen, die, obgleich für sich unmeßbar, doch mit meßbaren, endlichen Größen in derselben Gleichung stehen und Gegenstand grundlegender Überlegungen sein können. Wir haben, so denkend, auch die Möglichkeit, vollkommen sinnvoll auch von der Geschwindigkeit an einem einzelnen Punkte der Bahn zu reden, wobei an Weg und

Zeit zwischen dem betrachteten Punkte und einem ihm unendlich benachbarten Punkt zu denken ist.

40. Vektorgrößen. — Die Geschwindigkeit, gegeben in cm/sek, bestimmt die Bewegung eindeutig, wenn noch die Bahn dazu gegeben ist. Man kann Geschwindigkeit und Bahn zusammenfassen, indem man der Geschwindigkeit außer ihrer Größe auch noch eine Richtung, nämlich die der Bahn, wie sie durchlaufen wird, zuschreibt; und dies ist die zweckmäßigste Auffassung jeder Geschwindigkeit.

Zu vollständiger Angabe einer Geschwindigkeit gehört somit die Angabe ihrer Größe und die ihrer Richtung im Raum. Man nennt jede solche Größe, bei welcher diese Doppelangabe — Größe und Richtung — zu erschöpfender Festlegung unentbehrlich ist, eine Vektorgröße oder gerichtete Größe. Geschwindigkeiten sind demnach Vektorgrößen, und sie sind es, weil schon der zu ihrer Berechnung nötige Weg selbst eine Vektorgröße ist, indem er Länge und Richtung hat.

41. Abbildung von Geschwindigkeiten. — Geschwindigkeiten lassen sich — wie übrigens alle Vektorgrößen — durch gradlinige Strecken darstellen. Die Richtung der Strecke wird parallel der Richtung der darzustellenden Geschwindigkeit gezogen, etwa durch ein Pfeilzeichen eindeutig gemacht, und die Länge der Strecke wird proportional der Größe der Geschwindigkeit genommen.

42. Geschwindigkeiten sind immer bezugsmäßig (relativ), d. h. sie beziehen sich auf einen Vergleichsgegenstand, der die betreffende Geschwindigkeit nicht hat. Dies ist nach der Definition der Geschwindigkeit (37) selbstverständlich und es liegt dementsprechend auch in der Ermittelungsweise von Geschwindigkeiten, nämlich in der dazu nötigen Wegermittelung. Diese Ermittelung kann nur an einem Vergleichsgegenstand — an einem Maßstab — erfolgen; ohne Benutzung eines solchen kann eine bestimmte, zur Berechnung der Geschwindigkeit (Gl. 37) nötige Wegangabe gar nicht erhalten werden. Entlang diesem Gegenstande, der als Maßstab dient, oder an dem der Maßstab befestigt ist, z. B. entlang der Erde, ist der gemessene Weg zurückgelegt, und ebenso gilt dann die aus dem Weg (und der zugehörigen Zeit) berechnete Geschwindigkeit auch nur in bezug auf diesen Vergleichsgegenstand. Wählt man einen anderen Vergleichsgegenstand, der am erstgewählten nicht ruht, so erhält man in gleicher Zeit einen anderen Weg und berechnet dementsprechend auch eine andere Geschwindigkeit. Man muß daher bei Geschwindigkeitsangaben, wenn sie Sinn und Anwendungswert haben sollen, stets den Vergleichsgegenstand nennen. Dies kann in der Form geschehen, daß die Geschwindigkeit z. B. „relativ zur Erde" oder „bezogen auf die Erde" oder „gegen die Erde" oder „an der Erde" oder „entlang der Erde" gelte.

Als ein Beispiel der Abhängigkeit der Geschwindigkeitsangaben vom Bezugsgegenstand diene die Schallgeschwindigkeit. Die gewöhnliche Angabe — (rund) 330 m/sek — gilt gegen die Luft. Ruht die Luft an der Erdoberfläche, so gilt diese Geschwindigkeit auch gegen Erde; ist aber die Luft an der Erde bewegt, wie bei Wind, so hat der Schall eine andere Geschwindigkeit gegen Erde (43).

43. Zusammensetzung von Geschwindigkeiten. — Oft kommt es vor, daß ein Punkt aus zwei verschiedenen Ursachen zwei Geschwindigkeiten gleich-

zeitig hat, und es tritt die Aufgabe auf, zwei oder auch mehrere gleichzeitig vorhandene Geschwindigkeiten zusammenzusetzen, d. h. die Gesamt-Geschwindigkeit zu ermitteln, die der Punkt dann hat. Zum Beispiel: welches ist die Geschwindigkeit des Schalles (des den Schall ausmachenden Luftzustandes) an der Erde, wenn der Schall sowohl in der Luft mit 330 m/sek in bestimmter Richtung läuft als auch gleichzeitig samt der Luft mit ebenfalls gegebener Geschwindigkeit der Erde entlang sich bewegt?

Die der Erfahrung entnommene Beantwortung solcher Fragen der Zusammensetzung von Geschwindigkeiten ist schon seit Stevin und Galilei vorhanden; sie liegt in einem gewissen Parallelogrammsatz, der die schon erläuterte Abbildung der Geschwindigkeiten (41) benutzt: Man trage (Abb. 3) die beiden zusammenzusetzenden Geschwindigkeiten mit Richtung und Größe als Strecken vom betrachteten Punkte a aus auf, a b und a c, und ergänze zu einem Parallelogramm a b c d; die Diagonale a d des Parallelogramms stellt dann nach Richtung und Größe die gesuchte zusammengesetzte Geschwindigkeit dar. Letztere wird auch Resultierende der Einzelgeschwindigkeiten, Teilgeschwindigkeiten oder Komponenten genannt.

Haben die Komponenten übereinstimmende Richtung, so klappt das Parallelogramm zu einer Geraden zusammen und die Resultierende, wieder gegeben durch die Diagonale, hat dieselbe Richtung wie die Komponenten und als Größe die Summe der Größen der Komponenten. Ähnlich wird bei entgegengesetzten Richtungen der Komponenten die Größe der Resultierenden gleich der Differenz der Größen der Komponenten.

Hat der betrachtete Punkt mehr als zwei Geschwindigkeiten gleichzeitig, so kann man nach demselben Parallelogrammsatze die dritte Geschwindigkeit zur Resultierenden der beiden ersten hinzufügen u. s. f. weiter, bis alle vereinigt sind, wobei die Komponenten auch räumlich auseinandergehen können.

Man kann die Parallelogrammzeichnung auch durch „geometrische Addition“ ersetzen, d. i. durch Aneinanderstückelung der Komponenten mit Richtung und Größe. Der letzte Endpunkt ist dann der Endpunkt der Resultierenden. So ist in Abb. 3 die Geschwindigkeit a c tatsächlich an a b gestückelt; denn die von b aus gezogene Linie b d ist nach Richtung und Größe dasselbe wie a c, und man kommt also wieder zur Resultierenden a d.

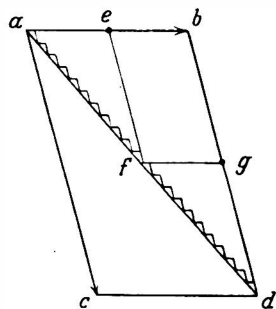


Abb. 3. Zusammensetzung von Vektorgrößen.

44. Sinn des Parallelogrammsatzes. — Die im Parallelogrammsatze oder der geometrischen Addition enthaltene Erfahrung hat den einfachen Sinn: daß zwei oder mehr Geschwindigkeiten, welche ein und derselbe Punkt gleichzeitig aus verschiedenen Ursachen hat, einander nicht stören, sondern daß sie sich bloß überlagern. Es ist nämlich einzusehen, daß die Diagonale, welche der Parallelogrammsatz als den Weg des betrachteten Punktes bei gleichzeitiger Wirkung beider Geschwindigkeiten angibt, auch der Weg ist, welcher bei getrennter Wirkung der beiden Geschwindigkeiten statthätte, wenn sie nur beide genügend über den ganzen Weg verteilt sind. Hat der Punkt a (Abb. 3)

1 Sek. lang die Geschwindigkeit a b, so kann er bis b kommen, erhält er danach 1 Sek. lang die Geschwindigkeit a c mit Richtung und Größe, so kommt er von b bis d, also eben dorthin, wohin auch die Resultierende ihn bringt, nur daß dies bei nicht gleichzeitigem Wirken der beiden Geschwindigkeiten nicht in 1 Sek. und nicht auf geradem Wege, sondern in 2 Sek. und auf dem Wege a b d stattfindet. Man kann die sekundenlange Wirkung jeder der beiden Geschwindigkeiten zerteilen, z. B. sie abwechselnd je $1/_2$ Sek. lang wirken lassen; dann kommt der Punkt in den 2 Sek. von a über e f und g nach d, und läßt man die beiden Geschwindigkeiten je $1/_{22}$ Sek. lang abwechselnd wirken, so kommt er auf der gestaffelten, der Diagonale schon sehr nahen Linie nach d. Man sieht, daß bei unendlich feiner Unterteilung, wobei dann der Punkt auf jedem endlichen Teile seines Weges tatsächlich beide Geschwindigkeiten hat, allerdings abwechselnd, genau die Diagonale als Bahn sich ergibt, also dieselbe Bahn, die er nach dem Parallelogrammsatz bei gleichzeitigem Vorhandensein beider Geschwindigkeiten beschreibt. Eben dies ist unter der Nichtstörung oder bloßen Übereinanderlagerung der beiden Geschwindigkeiten zu verstehen. Daß diese Bahn bei gleichzeitigem Vorhandensein beider Geschwindigkeiten nicht in zwei Sek., sondern in 1 Sek. durchlaufen wird, ist selbstverständlich, denn die angenommene Gesamtwirkung der beiden Geschwindigkeiten dauert bei Gleichzeitigkeit nicht 1 + 1, sondern nur 1 Sek.

45. Allgemeine Gültigkeit des Parallelogrammsatzes oder der geometrischen Addition. Summen von Vektorgrößen. — Da der Parallelogrammsatz nur die gegenseitige Nichtstörung zur Grundlage hat, so gilt er für alle Vektorgrößen (40), die einander nicht stören; er gilt für Wege und Geschwindigkeiten, und wir werden ihn auch für Beschleunigungen und Kräfte geltend finden. Umgekehrt kann überall, wo der Satz sich gültig zeigt, unmittelbar auf Nichtstörung der betreffenden Vektorgrößen geschlossen werden.

Der Nachweis der Geltung des Satzes liegt überall in der Erfahrung, daß alle mittels desselben gezogenen Schlüsse in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit sich gezeigt haben. Der gesamte Inhalt der Mechanik, und darüber hinaus auch noch die Anwendung auf elektrische und magnetische Kräfte (E 64, 282), liefert reichlich Beispiele dafür.

Wir werden in der Mechanik öfter mit Summen von Vektorgrößen zu tun haben; jede solche Summe wird stets geometrisch addiert (43) gedacht sein, wie es der allgemeinen Gültigkeit des Parallelogrammsatzes entspricht.

Die Tatsache der gegenseitigen Nichtstörung gleichzeitig vorhandener Geschwindigkeiten verschiedener Ursache bedeutet und bedeutete von jeher große Vereinfachung bei allen Untersuchungen über Geschwindigkeiten und ebenso über Kräfte, ja sie ermöglichte wohl überhaupt erst den frühen Anfang solcher Untersuchungen; denn wir befinden uns ausnahmslos in dem Falle, nur Geschwindigkeiten feststellen, beobachten und messen zu können, die von anderen, unbekannten Geschwindigkeiten überlagert sind, und ähnlich steht es bei den Kräften. Gewöhnlich beobachten wir Geschwindigkeiten gegen Erde, da die benutzten Maßstäbe meist an der Erde fest sind; es ist aber nicht zu bezweifeln, daß die Erde selbst bewegt ist. Ist beispielsweise (Abb. 3) a b eine im Zimmer auf Erden gemessene Geschwindigkeit irgendeines Körpers, und ist a c die gleich-

zeitige Geschwindigkeit des Zimmers im Sonnensystem, so wäre a d die Geschwindigkeit des beobachteten Körpers im Sonnensystem. Es ist aber gar nicht nötig, Geschwindigkeiten im Sonnensystem zu beachten — was auch keine einfache Sache wäre —, sondern es genügt mit Geschwindigkeiten sich zu befassen, die auf einen beliebigen, ruhend gedachten Körper bezogen sind, weil die anderen gleichzeitig noch vorhandenen Geschwindigkeiten nicht stören. Sie bleiben sogar vollkommen unmerklich (46); nur Änderungen der unbekannten Summanden können merklich werden (55).

46. „Absolutbewegung". — Wenn demnach für die Entwickelung der Mechanik die Beachtung von Teilgeschwindigkeiten genügt hat, so war doch die Frage nach vollen, „absoluten" Geschwindigkeiten berechtigt. Man müßte zu deren Kenntnis alle Teilgeschwindigkeiten kennen, die der betrachtete Punkt haben kann, so auch zuletzt die Geschwindigkeit des Sonnensystems „im Raume". Überhaupt hätten Absolutgeschwindigkeiten stets die Bedeutung von Geschwindigkeiten „relativ zum Raum". Sollen solche ermittelbar sein, ja soll auch nur der Gedanke daran Sinn haben, so müßte dem Raume etwas eigen sein, woran der Maßstab zur Wegmessung angelegt werden kann oder was selber zur Wegmessung dienen kann (38, 42). Dieses Etwas könnte der durch die Erscheinungen des Lichts überall im Raum angezeigte Äther sein. Von diesem Äther haben aber eben die Erscheinungen des Lichts gezeigt, daß er nicht einheitlich allen Raum erfüllt (O 23, 138), so daß er zum gesuchten allgemeinen, „absoluten" Bezugsgegenstand für Geschwindigkeiten nicht taugt. Das Bezugsgebilde für Geschwindigkeiten, das den ganzen Raum gesichert einheitlich erfüllte, ist nicht gefunden worden (O 26); alle Wege, die zu „Absolutgeschwindigkeit" der Erde oder des Sonnensystems führen sollten, zeigten sich versperrt (A 92, O 25). Nur Geschwindigkeiten der Gestirne gegeneinander sind ermittelbar, und selbst hierbei ist wohl Vorsicht angezeigt (A 92)[1]).

So weit wir wissen, ist der Raum anhaltspunktlos für den Gedanken an Absolutbewegung; es fehlt der feste Punkt im Raum. Wohl aber kann man eine feste Richtung haben. Daher ist zwar fortschreitende Bewegung nicht absolut erkennbar, wohl aber Drehbewegung (243, O 25, vgl. auch O 139).

47. Ungleichförmige Bewegung. — Ist die Geschwindigkeit längs der Bahn nicht überall dieselbe, so nennen wir die Bewegung ungleichförmig. Hier können bestimmte Geschwindigkeitsangaben überhaupt nur für je einen Punkt der Bahn gemacht werden, wobei in dem schon erläuterten Sinne (39) zu verfahren ist, nämlich durch Beachtung je eines unendlich kurzen Wegstückes und der zu seiner Durchlaufung gehörigen unendlich kurzen Zeit.

48. Geschwindigkeit als Differentialquotient. — Das sehr allgemeine Vorkommen ungleichförmiger Bewegungen hat es notwendig gemacht, ein besonderes Rechenverfahren für unendlich kleine Größen einzuführen und auszubilden (Newton, Leibniz), die Infinitesimalrechnung (Differential- und Integralrechnung). In der Bezeichnungsweise derselben ist die Geschwindigkeit — wie in 37 —

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad 48)$$

[1]) Was in astronomischen Werken „Absolutbewegung" (des Sonnensystems) genannt wird, ist (mittlere) Relativbewegung zu einer Anzahl von Himmelskörpern, die den Messungen gut zugänglich waren.

wobei ds den unendlich kurzen Weg (das „Differential" des Weges s oder Wegelement), dt die zugehörige unendlich kurze Zeit (das „Differential" der Zeit t oder Zeitelement) bezeichnet. Der Quotient beider heißt in der Sprache der Infinitesimalrechnung (erster) Differentialquotient des Weges nach der Zeit; man kann daher in dieser Sprache die Geschwindigkeit auch ganz allgemein definieren als den ersten Differentialquotienten des Weges nach der Zeit, was nur ein veränderter Wortausdruck für oben schon Festgesetztes und Klargelegtes ist (37).

49. Die Ermittelung von Geschwindigkeiten bei ungleichförmiger Bewegung kann entweder durch tatsächliche Messung genügend kurzer Wege und Zeiten erfolgen oder aber auf Umwegen. Für letzteren Fall bringen wir bei der Fallbewegung ein Beispiel (132 u. f.).

50. Beschleunigung. — Zur weiteren Untersuchung der ungleichförmigen Bewegung ist ein Maß für die bei ihr vorkommende Geschwindigkeitsänderung erforderlich; dieses Maß wird Beschleunigung genannt, und es wird unter Beschleunigung stets das Verhältnis verstanden zwischen der Geschwindigkeitsänderung und der Zeit, während welcher sie stattgefunden hat:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Geschw.-Änderung}}{\text{Zeit}} \qquad \text{oder } b = \frac{v_2 - v_1}{t_{1,2}}, \qquad 50)$$

wobei v_1 und v_2 die beiden, an zwei aufeinanderfolgend durchlaufenen Bahnpunkten 1 und 2 vorhandenen Geschwindigkeiten sind und $t_{1,2}$ die Zeit zur Zurücklegung des Weges von 1 bis 2 ist.

Nimmt die Geschwindigkeit zu, so ist die Beschleunigung nach ihrer Definitionsgleichung positiv; nimmt sie ab, so ist sie negativ. Man kann eine negative Beschleunigung Verzögerung nennen; doch ist besonderer Gebrauch dieser Benennung überflüssig.

51. Man sieht, daß zu einer Beschleunigungsmessung Geschwindigkeitsmessungen und eine Zeitmessung gehören, auch daß eine neue Einheit nicht erforderlich ist, sondern daß mit den Grundeinheiten cm für die Längen und sek für die Zeiten die Beschleunigungseinheit (cm/sek)/sek = cm/sek^2 wird, was diejenige Beschleunigung bedeutet, bei welcher die Geschwindigkeit in 1 sek um 1 cm/sek zunimmt.

52. Auch Beschleunigung stets bezugsmäßig (relativ). — Da der Beschleunigungsmessung Geschwindigkeitsmessungen zugrunde liegen und da diese erst mit der Angabe, woran der zur Messung benutzte Längenmaßstab festgelegt sei, Bestimmtheit erhält (42), so gilt die Notwendigkeit solcher Angabe auch für die Beschleunigung. Man kann auch sagen: Es ist — ähnlich wie bei einer Geschwindigkeitsangabe — auch bei einer Beschleunigungsangabe notwendig hinzuzufügen, auf welchen unbeschleunigt gedachten Körper oder Punkt die Angabe sich bezieht (s. dazu 116, 218).

Sind auch oft von selber Zweifel ausgeschlossen über den bei Beschleunigungsangaben benutzten Bezugsgegenstand, so ist doch die meist gänzliche Nichtbeachtung von dessen Wesentlichkeit ein Mangel an Klarheit im Denken, der leicht Fehlschlüsse ergeben kann.

53. Beschleunigung und Geschwindigkeit. — „Beschleunigung" ist einer der allerwichtigsten Begriffe der Bewegungslehre. Man bemerkt, daß

dieser Begriff auf den der Geschwindigkeit sich aufbaut, ganz so, wie der der Geschwindigkeit auf den Begriff der räumlichen Lage sich aufbaut. Geschwindigkeit mißt zeitliche Lagenänderung; Beschleunigung mißt zeitliche Geschwindigkeitsänderung.

Daß es auch bei der Beschleunigung die Zeit ist, auf die man die Änderung beziehen müsse um zu einem brauchbaren, der Wirklichkeit angepaßten Begriffe zu kommen, dies hat nur die Erfahrung zeigen können. Galilei versuchte zuerst, als er sah, daß es auf ein Maß für die Geschwindigkeitsänderung ankäme, diese Änderung auf den zwischenliegenden Weg zu beziehen, was naheliegender schien als die Bezugnahme auf die zwischenliegende Zeit; erst nach Jahren enttäuschender Bemühungen kam er auf die Zeit als das Maßgebende und damit auf den heute geläufigen Beschleunigungsbegriff, womit alles einfach und klar sich ordnete. Dies war einer der Hauptschritte, durch welche er Begründer der Bewegungslehre und damit der gesamten allgemeinen Physik der Materie wurde.

54. Allgemeinster Fall der Bewegung eines Punktes. — Eine Bewegung, bei welcher zwar nicht die Geschwindigkeit, jedoch die Beschleunigung unverändert gleich bleibt, wird gleichförmig beschleunigt genannt. Es ist in diesem Falle gleichgültig, ob man die Beschleunigung auf kürzeren oder längeren Wegstrecken mißt; man erhält immer dasselbe.

Eine Bewegung, bei welcher auch die Beschleunigung nicht gleich bleibt, wird ungleichförmig beschleunigt genannt. Es ist dies der allgemeinste Fall von Bewegung eines Punktes.

Man sieht ein, daß in diesem allgemeinsten Falle auch die Beschleunigung, so wie die Geschwindigkeit, nur auf sehr kurzen Wegstrecken eindeutig und sinnvoll gemessen werden kann; denn sie ist von Punkt zu Punkt der Bahn verschieden. Um mit Beschleunigungen vollkommen einwandfrei zu rechnen, beachtet man unendlich kurze Wegstrecken (Wegelemente), zu welchen auch unendlich kleine Geschwindigkeitsänderungen dv und unendlich kurze Zeiten (Zeitelemente) dt gehören. Es ist dann — wie in Gl. 50 — die Beschleungiung

$$b = \frac{dv}{dt}. \qquad 54a)$$

In dieser Schreibweise der Infinitesimalrechnung kommt die Analogie mit der Geschwindigkeit (53) aufs Deutlichste zum Ausdruck; denn so wie die Beschleunigung $b = dv/dt$, so war die Geschwindigkeit $v = ds/dt$ (48). Setzt man die zweite Gleichung in die erste ein, so hat man in der Schreibweise dieser Rechnungsart

$$b = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,(ds/dt)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} \qquad 54b)$$

oder in Worten: Die Beschleunigung ist der zweite Differentialquotient des Weges s nach der Zeit t, während die Geschwindigkeit v der erste Differentialquotient des Weges nach der Zeit ist (48).

Man sieht, daß diese Schreib- und Ausdrucksweise der Infinitesimalrechnung gut der Natur angepaßt ist.

55. Eine weitere Eigenschaft aller Materie ist

6. Die Trägheit,

auch Beharrungsvermögen genannt. Sie besteht darin, daß jeder Körper die ihm augenblicklich eigene Geschwindigkeit beizubehalten strebt, und zwar mit Größe und Richtung. Man kann auch sagen, es ist ein Sträuben gegen Geschwindigkeitsänderung, das jedem Körper eigen ist. Auch im Sonder-

fall der Ruhe, d. i. der Geschwindigkeit Null gilt dies. Man kann als „Trägheitsgesetz" aussprechen: „Jeder Körper hat das Streben, im Zustande der Ruhe oder der einmal angenommenen Bewegung fortzubeharren."

Die hier zum Ausdruck kommende Erfahrung ist alltäglich. Befinden wir uns in schnellem Laufen, so vermögen wir nicht plötzlich stillzustehen; unser eigener Körper äußert sein Sträuben gegen diese Geschwindigkeitsänderung. Oder sind wir auf einem Fahrzeuge, so bemerken wir beim Ingangsetzen der Fahrt, daß alle Gegenstände im Fahrzeug zurückbleiben wollen; beim Anhalten des Fahrzeuges dagegen strebt alles noch weiter voran. Alles Unglück bei Zusammenstößen schneller Fahrzeuge, alle Wirkung von Geschoßen ist Trägheitswirkung.

Wo solche Trägheitswirkungen auftreten ist man immer sicher, daß eine Geschwindigkeitsänderung stattgefunden hat[1]).

Es ist eine höchst merkwürdige, sonderbare Eigenschaft der Materie, die hier zutage tritt; man könnte sagen: die Materie besitzt Gedächtnis für Geschwindigkeit. Nicht nur für die Größe, auch für die Richtung der Geschwindigkeit gilt dies; bei jeder Wegkrümmung finden wir uns im Fahrzeug zur Seite gedrängt und zwar nach der äußeren Seite der Wegkrümmung hin, d. i. dorthin, wo die geradlinige Fortsetzung des Weges wäre.

Es war Galilei, der die Trägheitseigenschaft der Materie und ihre Grundwichtigkeit zum Verständnis aller Bewegungsvorgänge zuerst erkannte.

56. Die Eigenschaft der Trägheit ist verschiedenen Körpern in verschiedenem Maße eigen. Man denke an einen Wagen mit wohlgeölten Achsen auf horizontaler, glatter Bahn. Ein kleiner, leerer Wagen wird leicht von einem Manne in Bewegung gesetzt und auch leicht wieder angehalten; er hat nur wenig Trägheit. Ist es aber etwa ein vollbeladener Eisenbahnwagen, so vermag ihn ein Mann nur äußerst langsam in Bewegung zu setzen, und ebenso anstrengend ist es, ihm eine einmal erlangte Geschwindigkeit wieder zu nehmen; er hat offenbar eine sehr große Trägheit.

57. Masse. — Das Maß der Trägheit wird Masse genannt. Es ist dies die Definition des Begriffes „Masse".

Es ist demnach in den eben betrachteten zwei Fällen mit dem Wagen eine kleine Masse in Vergleichung gekommen mit einer großen Masse. Die hierbei gedachte Art der Vergleichung ist es auch, auf die es allein ankommen kann, wenn Massen definitionsgemäß miteinander verglichen werden sollen: Man hat die Größe einer Masse nach der Größe der Beschleunigung zu beurteilen, welche eine gegebene Kraft (z. B. die eines Mannes im gedachten Beispielsfalle) ihr beibringt. Je größer die Beschleunigung bei gegebener Kraft, desto kleiner die Masse; Masse und Beschleunigung sind nach Definition der Masse einander verkehrt proportional.

58. Massenmessung nach Definition. — Um diesen Grundgedanken einer nach Definition der Masse vorgehenden Massenmessung besser festzuhalten, betrachte man die Abb. 4. Es sei die Masse m zu messen; wir lassen auf sie

[1]) Die Umkehrung des Satzes gilt aber nicht, wenn nur massenproportionale Kräfte (wie die Schwere) wirken. So zeigen die Teile eines frei fallenden Körpers keine Trägheitswirkungen gegeneinander, obgleich sie in steter Geschwindigkeitsänderung begriffen sind (vgl. die fallende Flasche, 120).

eine — etwa durch die Verlängerung der Spiralfeder k zu bemessende — Kraft von bestimmter Größe eine gemessene Zeit lang von der Ruhe aus wirken. Das Reziproke 1/v der nach Verlauf dieser Zeit erlangten Geschwindigkeit v der Masse ist dann das richtige Maß der Masse m. Sobald eine Masseneinheit festgesetzt ist (131), kann der gleiche Versuch, mit gleicher Kraft und gleicher Zeit, auch mit dieser Einheit ausgeführt werden; ergibt sich hier die Geschwindigkeit v_1, so ist $m:1 = (1/v):(1/v_1)$ und also $m = v_1/v$ in der gewünschten Einheit gemessen.

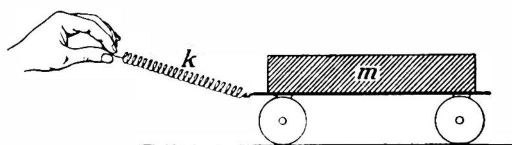


Abb. 4. Grundgedanke der Massenmessung nach Definition.

59. Man beachte, daß die Masse eines Körpers hiernach nichts zu tun hat mit seinem Gewicht. Nicht weil der beladene Eisenbahnwagen viel wiegt, ist er schwer zu beschleunigen, sondern weil er sehr träge ist. Nicht sein großes Gewicht kommt dabei in Betracht — denn eine Hebung findet auf der horizontalen Bahn nicht statt —, wohl aber seine große Masse. Daß Masse und Gewicht — Trägheit und Schwere — zusammenhängen, dies ist eine besondere Erfahrungstatsache, auf die wir später eingehen; die hier, bei Betrachtung der Trägheit vorgebrachten Erfahrungen zeigen, für sich allein genommen, nichts von diesem Zusammenhang, der in der Tat dem Unbefangenen, noch nicht Naturkundigen als eine neue, besondere Verwunderlichkeit erscheinen muß.

60. Ungestörtes Zusammenwirken von Massen. — Man findet, daß die durch die Masse gemessene Trägheit einer beliebigen Körpergruppe gleich ist der Summe der Massen der Einzelkörper. Es zeigt sich dies bei allen Anwendungen des Massenbegriffs in der ganzen Dynamik. Dies einfache Verhalten entspricht der naturangemessen getroffenen Wahl des Massenbegriffs.

61. Die Trägheit der Materie kann seit Hasenöhrl als Sonderfall der Trägheit aller Energie (E 434) betrachtet werden, insofern Materie wohl nur durch ihren Energieinhalt träge ist (E 583).

62. Kräfte. — Bei alleinigem Wirken der Trägheit wären alle Bewegungen in der Natur höchst einfach; jeder Körper, ja jedes Atom würde in gradlinig gleichförmiger Bewegung begriffen bleiben. Daß die tatsächlich zu beobachtenden Bewegungen anders sind, hat besondere Ursachen, die geschwindigkeits-abändernd wirken. Jede solche, in ihrem Wesen bekannte oder auch unbekannte Ursache einer Geschwindigkeitsänderung — einer Beschleunigung[1]) — wird Kraft genannt. Es ist dies die Definition des Begriffes „Kraft". Genommen ist der Begriff aus den ältesten, frühesten Erfahrungen unserer Vorfahren und unser selbst bei jeder Körperbetätigung, die mittels der Kräfte der Muskeln erfolgt. Der Begriff ist daher sehr geläufig; seinen Wert hat er aber nur durch die Festlegung mittels der vorangestellten Definition. Man muß dieselbe festhalten um nicht in Unklarheit zu verfallen (vgl. erste Fußnote

[1]) Da wir zunächst nur gradlinige Bewegung betrachten (35), brauchen wir nur Größenänderungen der Geschwindigkeit zu beachten. Aber auch Richtungsänderung, wie z. B. bei Kreisbewegung mit gleichbleibender Größe der Geschwindigkeit, wird durch dieselben Ursachen — durch Kräfte — hervorgebracht (193).

zu 195). Newton hat die Definition naturangemessen gewählt (vgl. Einleitung 9—11): es ergeben sich mit ihrer Benutzung einfache und allgemeingültige Gesetze (115, 116)[1]).

63. Vielheit der Kraftarten. — Es gibt Kräfte sehr verschiedenen Ursprungs: die Kräfte gespannter Federn (elastische Kräfte); die Kräfte, welche die Atome in den Molekülen zusammenhalten (chemische Kräfte); die Kräfte, welche die Moleküle fester und flüssiger Körper verhindern gradlinig auseinanderzufahren (Molekularkräfte); elektrische Kräfte; magnetische Kräfte; die Schwerkraft, welche den aus der Hand freigelassenen Körper nicht in Ruhe bleiben, sondern eine Geschwindigkeit nach unten annehmen läßt, oder den horizontal geworfenen Körper von seiner gradlinigen Bahn abweichen läßt; endlich die Muskelkräfte der Lebewesen, die Kräfte, welche den Menschen stets und nach seinem Willen zur Verfügung stehen und standen, um vorhandene Bewegungen abzuändern, und welche ihm den Begriff „Kraft" früh gebracht haben.

64. Einheitlichkeit der Wirkung der Kräfte. — So verschieden aber alle diese Kräfte ihrem Ursprung nach sind, in der Wirkung sind sie doch alle völlig gleich: sie bringen Geschwindigkeitsänderungen hervor. Das Gesetz, nach welchem dies geschieht, ist das Hauptgrundgesetz der ganzen Physik der Materie. Wir wären mit dessen Einführung (115) schon mitten in der Mechanik. Zuvor sind aber noch einfachere Dinge zu behandeln; zunächst, als letzte allgemeine Körpereigenschaft,

7. Die Schwere.

65. Es ist dies das Bestreben, welches alle Körper haben, sich der Erde zu nähern, wieder eine sonderbare, höchst erstaunliche Eigenschaft: daß der große Körper Erde alle kleineren um sich heranzieht, als sollte alles mit Sicherheit zusammenbleiben, was zur Erde gehört.

Die Eigenschaft äußert sich in verschiedener Weise: im freien Fall der Körper; im Wurf, dessen Bahn stets zuletzt zur Erde herabführt; im Druck auf die Unterlage, welchen ruhende Körper ausüben. Dieser Druck wirkt auch auf der Waage; man kennzeichnet daher die Schwere als allgemeine Körpereigenschaft auch mit den Worten: „Alle Körper sind wägbar." Wägbarkeit und Greifbarkeit (Undurchdringlichkeit, 15) sind die bezeichnendsten Eigenschaften aller Materie; sie unterscheiden dieselbe vom Äther, der weder greifbar noch wägbar ist.

66. Gewicht. — Die Schwere ist eine Kraft (62); sie zeigt sich als solche bei der Fall- und Wurfbewegung, wo sie dauernd Geschwindigkeitsänderungen hervorbringt, und wir haben sie auch oben schon unter den Kraftarten mit angeführt (63). Die Größe der Schwere, das Maß der Schwere eines Körpers wird auch sein Gewicht genannt. Gewichte sind somit Kräfte.

Man kann danach auch sagen, die Eigenschaft der Schwere zeigt sich darin, daß jeder Körper auf Erden dauernd von einer Kraft ergriffen ist, die ihn nach der Erde hinzieht.

---

[1]) Nicht so mit oft gebräuchlicher, oberflächlicher, der Definition nicht entsprechender Auffassung von „Kraft", die einer überwundenen Kenntnisstufe entspricht. Keine Kräfte nach Definition sind: „Spannkraft" (144), „lebendige Kraft" (145), „Fliehkraft" (194). Es sind das Namen aus den Zeiten noch ungeklärter Begriffe; man kann damit in die Irre gehen, wie immer, wenn man mit Wörtern statt mit Begriffen denkt. Über „Elektrische Kraft" und „Elektromotorische Kraft" s. E 64 u. E 156.

67. Krafteinheit. — Gewichte sind auf der Waage — die wir später eingehend betrachten (100, 112) — leicht zu vergleichen, zu messen. Man hat dazu als Gewichtseinheit das Gewicht eines cm^3 Wasser von 4^0 C, das Gramm (gr), eingeführt (s. 308).

Das Gramm (oder etwa sein 1000-faches, das Kilogramm) ist damit zugleich auch Krafteinheit überhaupt; denn man kann mittels der Waage auch andere Kräfte als nur die Schwere miteinander und mit dieser vergleichen und daher in Grammen ausmessen. (Über den Mangel der Einheit s. 192).

Diese hier neu hinzutretende Einheit, die Krafteinheit, ist eine neue Grundeinheit; sie stützt sich zwar auf das cm, schließt aber doch die willkürliche Wahl des Wassers in sich.

Das ursprünglich nach dem Gewicht des Wassers hergestellte Normalkilogramm wird zu Sèvres bei Paris in Gestalt eines Platinkörpers aufbewahrt. Alle im Gebrauch befindlichen Gewichtssätze sind mit Hilfe der Waage unmittelbar bzw. mittelbar mit jenem Normalkilogramm verglichen.

68. Irdisches Einheits-System. — Wir haben somit nun 3 Grundeinheiten: das cm für Längen, die sek für Zeiten und das gr für Kräfte. Es wird sich zeigen, daß alle übrigen Einheiten, für alle die verschiedenartigen Größen, die zu betrachten und zu messen sein werden, aus diesen 3 Grundeinheiten ableitbar sind, so wie wir bereits die Flächen-, Raum-, Geschwindigkeits-, Beschleunigungs-Einheit abgeleitet haben.

Man nennt die Gesamtheit aller auf jene 3 Grundeinheiten gestützten Einheiten das technische oder auch irdische Einheits-System; es ist für die meisten Betrachtungen der Mechanik zweckmäßig und allgemein gebraucht; auch wir führen es durch.

Auf das andere, das absolute Einheits-System gehen wir gelegentlich (192), ganz allgemein aber erst in der Physik des Äthers ein (E 262).

69. Ungestörtes Zusammenwirken der Schwerkräfte. — Die Waage zeigt, daß die Einzelgewichte eines Gewichtssatzes in der Wirkung sich addieren. Offenbar wirkt die Schwere auf jedes Atom eines Körpers einzeln, und die Gewichte der verschiedenen Atome stören einander nicht, wie quantitative chemische Arbeit schon früh es mit Erfolg annahm.

70. Spezifisches Gewicht[1]. — Die Schwere ist verschiedenen Körpern in verschiedenem Maße eigen. Das doppelte Volum desselben Stoffes wiegt doppelt so viel; man bemißt daher Stoffmengen auch nach Gewicht und zwar mit Vorteil, weil Gewichtsmessung mit der Waage sehr einfach ist.

Es haben aber gleiche Volume verschiedener Stoffarten verschiedenes Gewicht. Dies kommt im spezifischen Gewicht zum maßmäßigen Ausdruck. Es ist

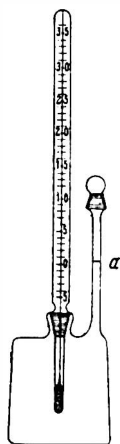
$$\text{Spezifisches Gewicht} = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Volum}} \qquad 70)$$

oder auch: das spezifische Gewicht ist das Gewicht der Volumeinheit des betreffenden Stoffes.

Zur Ermittelung eines spezifischen Gewichts gehört demnach eine Gewichtsmessung und eine Volummessung des gegebenen Körpers; beide Messungen werden am besten mittels der Waage ausgeführt (vgl. 14, 308 u. f.).

[1]) Auch „Artgewicht", auch „Wichte" genannt.

Am einfachsten gestaltet sich die Messung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten. Man benutzt dazu das Pyknometer (Abb. 5), ein Fläschchen mit fest abgrenzbarem Volum (bis zur Marke a), das man sowohl mit Wasser füllen kann, um durch Wägung das Volum zu ermitteln (14), als auch mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, um das in Gl. 70 mit dem Volum einzusetzende Gewicht zu ermitteln. Der untere Stöpsel ist als Thermometer ausgebildet, um die Temperatur des Wassers sowie die der Flüssigkeit zu kennen. Der obere Stöpsel dient nur zur Verhütung von Verdunstung während der Wägung; er bringt das Innere des Fläschchens unter keinen merklichen Druck, der dessen Volum ändern könnte. Bei der Leerwägung muß noch das Gewicht der im Fläschchen enthaltenen Luft berücksichtigt werden, was durch Rechnung (nach dem spezifischen Gewicht der Luft) geschehen kann.


Abb. 5. Pyknometer.

Ergebnisse für verschiedene Stoffe finden sich in Tab. 2. Das spezifische Gewicht des Wassers von 4° C (und sehr nahe auch 0° C, vgl. W Tab. 19) muß nach der Wahl der Gewichtseinheit (67) 1 gr/cm³ sein; es ist das die Einheit der spezifischen Gewichte. Viele Stoffe, besonders die Metalle, sind spezifisch schwerer als Wasser. Höhere spezifische Gewichte als das des Platins und der platinähnlichen Metalle sind aber nicht bekannt; man kann selbst durch höchste erreichbare Drucke (299, 305) nicht wesentlich mehr Materie in 1 cm³ bringen, als etwa 22 gr. Dagegen gehen die

Tab. 2. **Spezifische Gewichte (Dichten).**

gr/cm³

Platin	21·4	Wasser	1·00
Gold	19·3	Wachs	0·97
Quecksilber	13·6	Natrium	0·97
Blei	11·3	Alkohol (C_2H_6O)	0·79
Silber	10·5	Äther ($C_4H_{10}O$)	0·72
Kupfer	8·9	Buchenholz	0·7
Eisen	7·8	Lithium	0·5
Schwerspath	4·4	Tannenholz	0·5
Diamant	3·5	Kohlensäure	0·00198
Aluminium	2·7	Luft	0·00129
Glas	2·4	Wasserstoff	0·000089

Sämtlich bei 0° C und gewöhnlichem Druck.

spezifischen Gewichte beliebig gegen Null herab. Nicht nur viele feste Körper, auch Metalle (wie Na, Li), und Flüssigkeiten sind spezifisch leichter als Wasser, sondern Gase sind im allgemeinen schon unter gewöhnlichem Druck sehr viel leichter. Man erreicht bei den Gasen beliebig kleine spezifische Gewichte, wenn man sie unter verringerte Drucke bringt (356).

So wie das spezifische Gewicht stets nach seiner Definitionsgleichung (70) ermittelbar ist, so dient dieselbe Gleichung bei bereits bekanntem spezifischen Gewicht auch zur beliebigen Umrechnung von Gewicht auf Volum und umgekehrt.

71. Die Schwere ist seit Newton als Sonderfall der allgemeinen Gravitation erkannt (s. 205 f.).

II. Allgemeine Lehre vom Gleichgewicht (Statik).

72. Die Mechanik ist die Lehre von den Bewegungen der Materie. Diese Bewegungen wären ohne Kräfte sehr einfach (62). Newtons erstes Gesetz der Bewegung, das Trägheitsgesetz, hervorgegangen aus Galileis Erkenntnis der Trägheit (55), sagt dies mit den Worten: „Jeder Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmig gradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch Kräfte gezwungen ist diesen Zustand zu ändern." Es kommt und kam daher für die Entwickelung der Mechanik vor allem auf das Studium der Kräfte und ihrer Wirkungen an. Da in der Wirkung, wie wir schon sagten (64), alle Kräfte einander gleich sind, war es gleichgültig, an welcher Kraftart dies Studium sich entwickelt hat. Eine Kraftart lag hierzu immer besonders nahe: die Schwerkraft (66). Sie wirkt ohne weiteres auf jeden Körper auf der Erdoberfläche, kann auch gar nicht entfernt werden und war daher in jedem Falle von vornherein zu beachten, und sie hat vor der ursprünglich nächstgelegenen Muskelkraft den großen Vorzug, fürs Maßmäßige hervorragend geeignet zu sein. So war es ebenso natürlich als zweckmäßig, daß ganz vorwiegend die Kraft der Schwere zu den Studien über Kräfte überhaupt gewählt worden ist.

73. Gleichgewicht von Kräften. — Halten wir uns also an die Schwerkraft, so lehrt sie uns vor allem eines: Nicht immer bringt Kraft Beschleunigung hervor. Man sehe nur irgendwelche Körper auf einem Tische ruhen. Es ist kein Zweifel, daß sie von der Schwerkraft nach unten gezogen werden, und doch verharren sie in ihrem Zustand der Ruhe. Zwar also ist Kraft definitionsgemäß Ursache von Beschleunigung, und zwar — entsprechend Newtons erstem Gesetz (72) — alleinige Ursache einer solchen, so daß vom Vorhandensein einer Beschleunigung stets mit Sicherheit auf das Vorhandensein einer Kraft geschlossen werden kann, aber es gilt nicht immer der umgekehrte Schluß; Kraft kann vorhanden sein und Beschleunigung doch fehlen.

Sieht man in solchen Fällen, wie bei den Körpern auf dem Tische, näher zu, so findet man, daß die betrachtete Kraft, die ohne ihre Beschleunigungswirkung bleibt, nicht die einzige wirkende ist, sondern daß mindestens noch eine zweite Kraft mitwirkt, welche die Wirkung der ersten vernichtet. Legt man irgendeinen Körper auf die Tischplatte, so wirkt die nie fehlende Schwerkraft sogleich an ihm und läßt ihn ein wenig nach unten sich bewegen, wobei er die Tischplatte ein wenig einbiegt. Die so gebogene Tischplatte übt nun von sich eine elastische Kraft aus, die die Biegung wieder auszugleichen sucht (255). Diese nach oben gerichtete elastische Kraft ist hier die zweite, noch hinzugekommene Kraft, und sie vernichtet genau die Wirkung der nach unten ge-

richteten Schwerkraft. Ist die Durchbiegung einer Tischplatte unter den darauf liegenden Körpern in den meisten Fällen auch nur mikroskopisch klein, so ist der Vorgang doch genau derselbe wie beim Aufhängen eines Gewichtes an einem Kautschukfaden oder an einer Spiralfeder, wobei die am Faden oder an der Feder auftretende Dehnung sehr leicht sichtbar ist. Diese elastischen Verformungen an Tischplatte oder Aufhängefaden schreiten so weit vor, bis die mit der Verformung wachsende elastische Kraft die Größe der zu tragenden Schwerkraft erreicht hat; dann tritt Stillstand ein. Jetzt wirken zwei Kräfte auf den betreffenden Körper, die einander gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind. Die Schwerkraft würde, wenn allein vorhanden, dem Körper eine Beschleunigung nach unten erteilen, die gleichgroße elastische Kraft allein eine ebenso große Beschleunigung nach oben; beide Wirkungen, gleichzeitig vorhanden, vernichten einander, was wir alsbald näher untersuchen (78). Man sagt dann: Die beiden Kräfte halten einander das Gleichgewicht. Es können auch drei und mehr Kräfte einander das Gleichgewicht halten.

74. Statik. — Dieser Sonderfall des Gleichgewichts, wo trotz Vorhandenseins von Kräften keine Beschleunigung auftritt, ist einfacher als der allgemeinere Fall der Beschleunigung und also Bewegung. Es ist daher die Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte — die Statik — auch schon frühe zur Entwickelung gekommen — schon seit Archimedes —, wogegen der allgemeinere und Hauptteil der Mechanik, die eigentliche Lehre von den Bewegungen der Materie — die Dynamik — erst viel später, durch Galilei begründet werden konnte. Auch wir nehmen die Lehre vom Gleichgewicht voraus.

75. Abbildung von Kräften. — Vor allem ist es erforderlich, eine brauchbare Vorstellung von Kräften zu haben und damit auch eine gute Abbildungsweise für dieselben zu gewinnen, die nur das Wesentliche, dies aber vollständig enthält. Dieses Wesentliche jeder Kraft liegt in 3 Dingen: in ihrer Größe, ihrer Richtung und ihrem Angriffspunkt. Man sieht, daß Kräfte Vektorgrößen sind, wie Geschwindigkeiten (40). Sie können daher als gerade Linien mit Pfeilspitze abgebildet werden. Zieht man die Linie vom Angriffspunkt A der darzustellenden Kraft aus (Abb. 6) in der Richtung, welche die Kraftrichtung ist, und wählt man ihre Länge K proportional der Größe der Kraft, so ist die erschöpfende Abbildung erreicht.

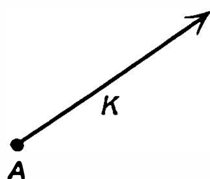


Abb. 6.
Abbildung einer Kraft.

Die Vektorbeschaffenheit aller Kräfte geht auch schon aus der Definition der Kraft hervor (62). Denn wenn Kräfte Geschwindigkeitsänderungen, d. i. das Neuhinzutreten von Geschwindigkeiten zur Wirkung haben sollen, so muß auch die Ursache, die Kraft, schon die Merkmale dieser Wirkung, nämlich Größe und Richtung besitzen.

76. Zusammensetzbarkeit von Kräften. — Es ist nun auch leicht, die Frage zu beantworten, was geschehen wird, wenn mehrere Kräfte gleichzeitig am selben Angriffspunkt wirken. Es muß möglich sein, alle diese Kräfte durch eine einzige Kraft vollkommen zu ersetzen; denn der Angriffspunkt kann unter Wirkung beliebig vieler Kräfte doch nur eine bestimmte Geschwindigkeitsänderung erfahren, und diese könnte ihm auch durch eine einzige Kraft von geeigneter Größe und Richtung beigebracht werden. Eben diese eine Kraft,

welche somit sämtliche an dem Punkt angreifende Kräfte vollkommen ersetzt, wird die **Resultierende** dieser Kräfte genannt, während die letzteren auch **Komponenten** heißen.

77. Kräfteparallelogramm. — Insofern — wie wir schon sahen — gleichzeitig vorhandene Geschwindigkeiten und also auch Geschwindigkeitsänderungen eines Punktes einander nicht stören (45), sondern sich nur überlagern, muß dies auch bei den Kräften der Fall sein, welche die Ursachen der Geschwindigkeitsänderungen sind. Es ist also auch für die Kräfte die Zusammensetzung nach dem Parallelogrammsatz, welche eben auf dieser Nichtstörung beruht (44), als gültig zu erwarten.

In der Tat zeigt sich das Kräfteparallelogramm ebenso gültig wie das Geschwindigkeitsparallelogramm (43). Im besonderen Fall gleichgerichteter, am selben Punkte angreifender Kräfte ist demnach die Resultierende der Kräfte von derselben Richtung, und ihre Größe ist durch die Summe der Komponenten gegeben. Bei zwei entgegengesetzt gerichteten Kräften ist die Größe der Resultierenden durch die Differenz dieser Kräfte gegeben; sind die beiden einander entgegengesetzten Kräfte gleich groß, so wird die Differenz und somit die Resultierende Null.

Wie die Zusammensetzung von Kräften, so gestattet der Parallelogrammsatz auch die **Zerlegung einer gegebenen Kraft** in Komponenten, deren Richtungen z. B. vorgegeben sein können, in leicht verständlicher Weise (84 zeigt ein Anwendungsbeispiel).

78. Bedingung des Gleichgewichts. — Das Nullwerden der Resultierenden ist der Fall des Gleichgewichts, in welchem trotz vorhandener Kräfte keine Geschwindigkeitsänderung eintritt, wovon wir ausgingen (73), und man sieht, daß die Bedingung des Gleichgewichts ganz allgemein diese ist: daß **die Resultierende aller vorhandenen Kräfte Null** sein muß.

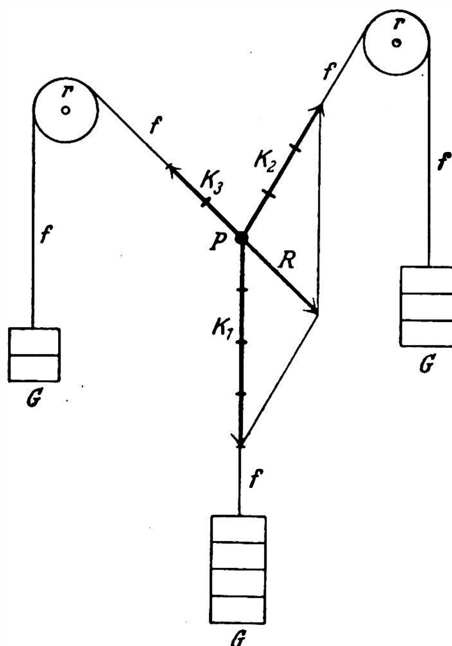


Abb. 7. Kräfteparallelogramm.

79. Prüfungen des Kräfteparallelogramms. — Das Gelten des Kräfteparallelogramms, d. i. der Nichtstörung der Kräfte, kann durch besondere Versuche geprüft werden, indem man Kräfte bekannter Größen, am einfachsten von Gewichten G G G (Abb. 7) stammend, an Fäden f f f ziehen läßt, die auf ihren Verknüpfungspunkt P wirken, wobei man mittels Rollen r r beliebige Richtungen der Kräfte hervorbringen kann, etwa wie es Abb. 7 zeigt. Die leichte Beweglichkeit der Rollen sichert die Gleichheit der Kraftgröße längs jedes einzelnen Fadens bis zum Punkt P hin. Tritt dann Gleichgewicht ein, so können

zwei der auf P wirkenden Kräfte, K_1 und K_2, nach dem Parallelogrammsatz zu einer Resultierenden R vereinigt werden, etwa auf einer hinter den Fäden angebrachten Zeichenebene, wie es Abb. 7 zeigt, und es ergibt sich dann als Bestätigung des Satzes, daß diese Resultierende entgegengesetzt gleich ist der dritten Kraft, K_3, so daß die Gesamtresultierende aller drei Kräfte Null ist, wie es dem Bestehen des Gleichgewichtes entspricht. Jede Änderung an Größe oder Richtung einer der drei Kräfte zerstört das Gleichgewicht; es tritt Bewegung ein, worauf ein neues Gleichgewicht sich einstellt, an welchem der Parallelogrammsatz wieder geprüft werden kann.

Die besten Erfahrungsbeweise von Naturgesetzen ergeben sich aber oft nicht auf so direktem Wege, sondern indem man entferntere Folgerungen aus den Gesetzen zieht, deren Zutreffen in geeigneten Fällen sehr vielfältiger Erfahrungsprüfung zugänglich ist. Solches findet für das Kräfteparallelogramm bei den Maschinen statt, die schon von früh her (seit Archimedes) Gegenstand reicher Erfahrung in vielerlei Anwendungen waren.

Maschinen.

80. Unter Maschinen sind Vorrichtungen zu verstehen, welche geeignet sind, Größe, Richtung, Angriffspunkt gegebener Kräfte beliebig abzuändern.

Man kann 6 einfache Maschinen unterscheiden, aus welchen alle übrigen Maschinen — sofern sie aus festen Körpern bestehen[1]) — zusammengesetzt sind: Schiefe Ebene, Keil, Schraube, Hebel, Rolle, Wellrad. Die nähere Betrachtung zeigt, daß die ersten drei ganz auf die schiefe Ebene, die anderen drei ganz auf den Hebel zurückführbar sind, so daß nur diese beiden Maschinen eingehend zu behandeln sind.

81. Schiefe Ebene ist jede zu gegebener Kraftrichtung nicht senkrechte Gleitbahn. Kommt es, wie gewöhnlich, auf die Schwere als Kraft an, so muß die Gleitbahn schief zur Horizontalen laufen; die bekannte Anwendung im Bauwesen zum erleichterten Heben von Lasten ist sehr alt, und jede Gebirgsstraße ist ein Beispiel der schiefen Ebene.

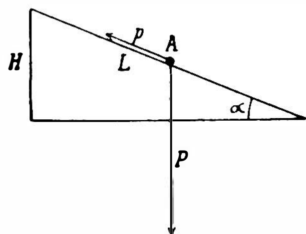


Abb. 8. Schiefe Ebene.

Das Wesentliche ist, daß eine längs der schiefen Ebene wirkende Kraft p (Abb. 8) einer größeren, am gleichen Punkte A angreifenden, gegebenen Kraft P das Gleichgewicht halten kann. H heißt die Höhe, L die Länge, α die Schiefe der schiefen Ebene.

82. Übersetzungs-Verhältnis. — Hauptfrage ist, wie bei jeder Maschine: Wie groß ist die Kraftersparnis bei ihrer Anwendung? In diesem Falle: Mit welcher kleinen Kraft p kann man das Herabgleiten von A bei Wirkung der großen Kraft P verhindern (und bei Hinzufügung eines Überschusses zu p sogar in Aufsteigen von A verwandeln)? Das Maß dieser Kraftersparnis, das Verhältnis p : P, wird auch das Übersetzungsverhältnis der Maschine genannt.

---

[1]) Die wesentlich mit einer Flüssigkeit arbeitende hydraulische Presse betrachten wir später (299).

83. Übersetzungs-Verhältnis der schiefen Ebene aus der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile. — Stevin hat das Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene zuerst in sehr bemerkenswerter Weise durch einen Gedankenversuch ermittelt. Man denke eine endlose, auf gleicher Länge überall gleich schwere Kette um die schiefe Ebene gelegt, wie es Abb. 9a zeigt. Man kann dann behaupten, daß diese Kette niemals durch ihre Schwere ins Gleiten auf der schiefen Ebene kommen wird, möge sie auch noch so reibungslos, z. B. über Rollen aufgelegt sein. Denn träte ein solches Gleiten ein, so würde es immer weiter fortdauern müssen, da die Verteilung des Gewichts der Kette dabei sich nicht ändert; sie würde sich dauernd durch ihre Schwere im Kreise herum bewegen müssen.

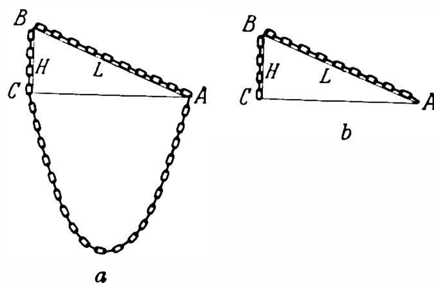


Abb. 9. Stevin's Gedankenversuch.

Es wäre das eine Vorrichtung, die dauernd aus sich selbst heraus in Bewegung bliebe. Eine Vorrichtung, die dies leistet, „Perpetuum mobile" genannt, hat man lange und mit viel Bemühen irgendwie zu verwirklichen gesucht; sie wäre von großer praktischer Nutzbarkeit; man erhoffte einen dauernd von selbst laufenden Motor. Aber die Herstellung gelang nie, und daraus ist die Erfahrung genommen, daß das Perpetuum mobile unmöglich ist (vgl. auch 152). Auf diese Erfahrung, die Stevin schon zu seiner Zeit jedenfalls bei Zuhilfenahme rein mechanischer Mittel für genügend abgeschlossen hielt, gründete er die Herleitung des Übersetzungsverhältnisses, wie folgt:

Kommt die Kette nicht ins Gleiten, so wird sie es auch nach Weglassung des unteren, frei hängenden Teiles nicht tun; denn dieser Teil ist vollkommen symmetrisch zu seiner Mitte geformt; er zieht daher mit gleichen Kräften an seinen beiden Enden nach der einen wie nach der anderen Seite hin. Es wird somit auch das übrigbleibende Kettenstück (Abb. 9b) im Gleichgewicht sein. Der eine Teil desselben, A B, liegt auf der schiefen Ebene und strebt vermöge seines Gewichtes herunterzugleiten; der andere Teil, B C, zieht frei hängend mit seinem ganzen Gewicht dagegen. Es entspricht daher das Gewicht des Kettenstückes A B der Kraft P (Abb. 8) und das Gewicht von B C der Kraft p, und da die Kettengewichte wie ihre Längen sich verhalten, so sieht man, daß $p : P = H : L$.

Das Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene ist also gegeben durch das Verhältnis ihrer Höhe zu ihrer Länge, oder auch — was dasselbe ist — durch den Sinus der Schiefe, $p = P \sin \alpha$.

84. Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene aus dem Kräfteparallelogramm. — In anderer Weise leitet man dasselbe Übersetzungsverhältnis ab, indem man die Kraft P in die beiden Komponenten p_1 und q_1 zerlegt (Abb. 10), deren eine längs der schiefen Ebene und deren andere senkrecht zu ihr wirkt. Diese beiden Kräfte ersetzen nach dem Kräfteparallelogramm vollkommen die Kraft P; es wird also Gleichgewicht sein, wenn es unter dem Einfluß dieser beiden Kräfte statthat. Aber q_1 weckt, gegen die schiefe Ebene

drückend und diese elastisch verbiegend, eine ihr gleiche und entgegengesetzte elastische Kraft q′ aus dem Stoff der schiefen Ebene (vgl. 73), welche mit q_1 zusammen die Resultierende Null hat. Es wird also die Gesamtresultierende Null, und somit Gleichgewicht sich ergeben, wenn noch eine Kraft p hinzu kommt, die entgegengesetzt gleich p_1 ist. Diese Kraft p wird also P auf der schiefen Ebene das Gleichgewicht halten, und man sieht aus der geometrischen Ähnlichkeit zweier Dreiecke, deren eines die schiefe Ebene, deren anderes die Hälfte des Parallelogramms ist, wieder $p : P = H : L$ oder auch $p = P \sin \alpha$.

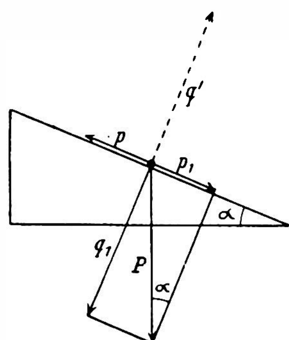


Abb. 10. Schiefe Ebene.

85. Der Wirklichkeit entsprechende Vorstellungen stützen einander. — Die beiden Wege (83 und 84) führen also zum selben Ergebnis. Es bedeutet dieses auch die Herstellung einer Verbindung zwischen den Erfahrungen, welche auf den beiden Wegen benutzt wurden, nämlich: einerseits die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile und andererseits die Gültigkeit des Kräfteparallelogramms oder der gegenseitigen Nichtstörung der Kräfte. Beide Erfahrungssätze stützen so einander und werden auch gestützt durch die Erfahrungen an der schiefen Ebene, welche die Gültigkeit des gefundenen Übersetzungsverhältnisses zeigen.

Es ist dies ein Beispiel für die überall in echter Naturforschung wesentliche Verknüpfung verschiedenartiger Erfahrungen miteinander.

Jede ernst zu nehmende „Ableitung" eines Gesetzes besteht im wesentlichen nur in dem überzeugenden Nachweis davon, daß das Gesetz mit schon gut verknüpfter Erfahrung steht und fällt; alles andere ist nebensächliches Beiwerk. Das in solcher Weise fortlaufend ausgebaute Wissen von der Natur ergibt ein Gedankengebäude, in welchem alle, auch die entferntesten Teile fest miteinander verbunden sind und einander stützen.

86. Erlaubte und unerlaubte Gedankenversuche. — Stevins Gedankenversuch (83) sind später noch viele weitere Gedankenversuche von großer Wichtigkeit gefolgt, auch in den anderen Teilen der Physik (z. B. W 72 und 252, E 434). Sie benutzen stets Erfahrungen, die schon vorhanden sind; es ist deshalb die Ausführung dieser Versuche auch nur in Gedanken erforderlich (Einl. 13). Neues zeigen sie dadurch, daß in ihnen schon bekannte Natureigentümlichkeiten in neuartiger Weise zur Geltung kommen. Es werden zu Gedankenversuchen so wie zu wirklichen Versuchen stets Vorrichtungen (Apparate), oft sehr einfacher Art, oder erfahrungsmäßig vorhandene Naturgegenstände benutzt, und der Beobachter (Experimentator) nimmt Eingriffe an denselben vor, wie bei einem wirklichen Versuch (Experiment); er nimmt aber keinen Einfluß auf den Ablauf der Vorgänge, in denen er die zu erforschende Natur allein, vorhandener Erfahrung entsprechend, walten läßt.

Höchst wichtig bei den Gedankenversuchen ist es, daß die Eingriffe, ebenso wie die den Vorrichtungen zugeschriebenen Eigenschaften ausschließlich erfahrungsmäßig mindestens in irgendwelcher Annäherung Mögliches, Verwirklichbares bedeuten dürfen. Nicht genau zu Verwirklichendes, wie

z. B. vollkommene Reibungslosigkeit vorkommender Bewegungen, muß in verschiedenem Grade der Annäherung erreichbar sein, wodurch die Überzeugung erlangt wird, daß die Unvollkommenheit der Durchführung keinen wesentlichen Einfluß auf den Ablauf der Vorgänge hat. Gedankenversuche dieser Art nennen wir erlaubt. Sie haben stets zu Ergebnissen geführt — oft sehr bemerkenswerter und höchst aufschlußreicher Art —, die nachher in bester Verbindung mit allen Beobachtungen an wirklichen Naturvorgängen sich zeigten.

Im Gegensatz dazu steht der verwerfliche unerlaubte Gedankenversuch, der Vorgänge oder Eingriffe mitbenutzt, die sehr wohl denkbar, aber in gar keiner Annäherung verwirklichbar sind; seine Ergebnisse sind für ernste Forschung unbrauchbar; sie führen nur in die Irre[1]). Als ein Beispiel eines unerlaubten Gedankenversuchs sei das Sichdrehenlassen des ganzen Fixsternhimmels um die Erde erwähnt. Denkbar ist der Vorgang; er entspricht sogar auch dem Sinneseindruck, welchen die tägliche Drehung der Erde gibt; es ist aber die Drehung der Gesamtwelt um irgendeinen Körper in gar keiner Annäherung zu verwirklichen; es fehlen alle Mittel dazu. Es ist auch unzweifelhaft nachgewiesen, daß die tägliche und jährliche Drehung der Erde ganz dieser und zu keinem Teil dem Fixsternhimmel zugehören (243, 244, O 25). Ein anderes Beispiel eines unerlaubten Gedankenversuchs zeigt E 486.

87. Zusatzkräfte der Mechanismen. — Die Anwendung des Kräfteparallelogramms auf die schiefe Ebene (84) zeigt auch einen charakteristischen Beispielsfall des Hinzutretens neuer Kräfte, wie q′ (Abb. 10), aus mitwirkenden Körpern, zu den von außen her gegebenen Kräften (vgl. auch 73). Diese Zusatzkräfte müssen, als tatsächlich vorhanden und mitwirkend, auch stets in Betracht gezogen werden um zu richtigen Ergebnissen zu kommen.

Man kann die Eigenart eines gegebenen Mechanismus, wie z. B. daß den beweglichen Punkten gewisse Bahnen als allein möglich vorgeschrieben sind oder daß die Punkte starren Verbindungen miteinander unterworfen sind, stets durch solche Zusatzkräfte richtig zur Geltung bringen, und dies ist für Rechnungen mit Mechanismen oft von Belang.

88. Kräfte und Wege bei Maschinen. — Aus dem gefundenen Übersetzungsverhältnis der schiefen Ebene (83, 84) ist zu ersehen, daß man mittels dieser Maschine um so mehr an Kraft spart, je geringer die Schiefe der Ebene ist. Bei Gebirgsbahnen z. B. muß die Zugkraft der Lokomotive ausreichen um das gesamte, in allen Fällen sehr vielmal diese Zugkraft übertreffende Gewicht des Eisenbahnzuges in die Höhe zu schaffen. Es wird gewöhnlich die Steigung solcher Bahnen in einem Bruch angegeben, der etwa bei der Schwarzwaldbahn bis zu 1 : 50 geht; d. h. es findet 1 m Steigung auf je 50 m Bahnlänge statt. Man sieht, daß dieser Bruch eben das Verhältnis von Höhe zu Länge der schiefen Ebene, also ihr Übersetzungsverhältnis ist. Die Lokomotive benötigt demnach nur je 1 kgr Zugkraft auf je 50 kgr bewegliches Gesamtgewicht, um Gleichgewicht zu halten, und ein vorhandener Überschuß der Zugkraft ist dann für die eintretende Aufwärtsbewegung maßgebend.

Betrachtet man (Abb. 11) eine Reihe verschiedener schiefer Ebenen a b, a c, a d, ..., welche sämtlich die Höhenstufe H überwinden lassen, so sieht man, daß die durch das Übersetzungsverhältnis gegebene Kraftersparnis jedesmal mit einer entsprechenden Verlängerung des Weges verbunden ist, längs welchem die Kraft wirken muß. Wird ein Gewicht P ohne

[1]) Die Beschäftigung eines „Naturforschers“ mit solchen Gedankenversuchen kommt dem gleich, was der Kaufmann betrügerisches Denken nennen würde.

schiefe Ebene, d. i. längs des Weges a a′ gehoben, so ist dazu die volle Kraft P (mit einem Überschuß, der beliebig klein gewählt werden kann) nötig, und der Weg ist H. Findet die Hebung mittels der schiefen Ebene a e statt, so ist zwar nur der Bruchteil H/L der Kraft nötig; aber der Weg ist L und also im Verhältnis L/H vermehrt. Geht also die Kraft vermittels einer schiefen Ebene auf $^1/_{10}$, so wird der Weg 10-fach, geht sie auf $^1/_{100}$, so wird der Weg 100-fach: Was an der Kraft erspart wird, muß stets am Weg zugegeben werden.

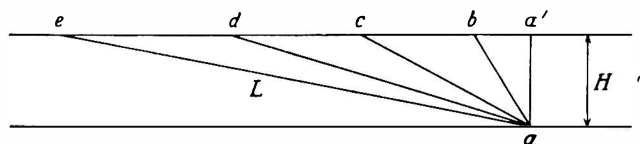


Abb. 11. Arbeit auf der schiefen Ebene.

Es ist dies ein ganz allgemein, nicht nur für die schiefe Ebene, sondern für alle Maschinen gültiger Satz (Stevin). Man kann ihn auch in der Form aussprechen: „Je mehr eine Maschine Kraft spart, desto langsamer fördert sie

89. Arbeit. — Dieser Satz kann in anderer Form mittels des auch an sich und in jeder Beziehung höchst wichtigen Begriffes der Arbeit ausgedrückt werden.

Der Begriff „Arbeit" ist dem Handwerk entnommen. Es wird da mittels der Muskelkräfte gearbeitet — Arbeit geleistet — und zwar meist gegen andere Kräfte, z. B. gegen die Schwerkraft: Die Hebung eines Gewichtes bedeutet Arbeitsleistung. Hebt man 1 kgr 1 m hoch, so ist das eine wohlbemessene Arbeitsleistung, die auch als Arbeitseinheit dient: das „Meterkilogramm" (mkgr). Die Hebung von n kgr um 1 m erfordert n-mal so viel Arbeit, gleichgültig ob die Hebung auf einmal oder in Abteilungen erfolgt. Ebenso erfordert oder bedeutet die Hebung von 1 kgr um n Meter ebenfalls die n-fache Arbeitsleistung, n mkgr. Man sieht daraus, daß die Arbeit in allen Fällen durch das Produkt aus der Kraft, gegen die gearbeitet wird, und dem Weg, längs welchem die Kraft überwunden wird, gegeben ist:

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg}. \qquad 89)$$

Festzuhalten ist dabei, daß in diesem Produkt Kraft und Weg stets die gleiche Richtung haben müssen. Stehen Kraft und Weg senkrecht zueinander, so wird überhaupt keine Arbeit gegen die Kraft geleistet. Verschiebt man z. B. ein Gewicht in horizontaler Richtung, so wird keine Arbeit gegen die Schwerkraft geleistet. Wohl kann dabei Arbeit gegen etwa vorhandene Reibung geleistet werden, denn die Kraft der Reibung liegt in der Bewegungsrichtung; aber man muß Arbeiten, die etwa gleichzeitig gegen verschiedene Kräfte geleistet werden, stets wohl voneinander unterscheiden. Sind Kraft und Weg bei einer Arbeitsleistung gegeneinander geneigt, so kommt vom Weg nur die in der Kraftrichtung liegende Komponente in Betracht, nicht die dazu senkrechte, oder auch — was dasselbe ist — es kommt von der Kraft nur die in der Wegrichtung liegende Komponente in Betracht.

90. Maschinen ändern die Größe der Arbeit nicht. — Bei der schiefen Ebene ist, wie wir sahen (88, Abb. 11), mit der Verringerung der Kraft auf 1/n stets eine Vergrößerung des (in Richtung dieser Kraft liegenden) Weges auf

das n-fache verbunden. Daraus folgt, daß die Arbeit ungeändert immer dieselbe bleibt, nämlich P · H mkgr zur Hebung des Gewichtes P um die Höhenstufe H, gleichgültig ob die Hebung ohne schiefe Ebene oder mittels irgendeiner beliebig schiefen Ebene stattfindet.

Arbeitsersparnis findet also durch die Maschine nicht statt; wohl aber kann die zu leistende Arbeit durch Wahl einer geeigneten Maschine nach Belieben passend zusammengesetzt werden. Hat man nur eine geringe Kraft zur Verfügung, so kann bei Zuhilfenahme einer Maschine doch gegen eine beliebig große Kraft gearbeitet werden, was ohne Maschine nicht möglich wäre, und hierin besteht der Nutzen der Maschinen.

Dieser Satz von der Unveränderlichkeit der Arbeit, welchen wir für die schiefe Ebene aus deren Übersetzungsverhältnis eingesehen haben, gilt — wie der ihm gleichwertige Satz von der Vermehrung des Weges bei Ersparnis von Kraft (88) — für alle Maschinen (98).

Diese Allgemeingültigkeit kann aus der Erfahrung von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile (83) eingesehen werden. Denn würde es möglich sein, mittels irgendwelcher Maschine Arbeit zu sparen, so könnte mittels derselben unter Aufwendung einer Arbeit A. = P · H ein Gewicht P auf eine größere Höhe als H gehoben werden, und dieses Gewicht könnte in einer gleichen Maschine wieder ein ebenso großes Gewicht auf eine noch größere Höhe heben und so fort, mit dem Endergebnis beliebig hoher Hebung des Gewichts mittels eines ursprünglich kleinen Arbeitsaufwandes, der aus dem Überschuß auch immer wieder ersetzbar wäre, so daß die Vorrichtung mittels des einmal gehobenen Gewichts als Triebkraft fortdauernd Arbeit aus sich selbst abgeben, also als Perpetuum mobile dienen könnte.

91. Der Satz von Kraft und Weg (88) oder von der Arbeit (90) dient vorteilhaft auch zur Ermittelung des Übersetzungsverhältnisses jeder beliebigen, gegebenen Maschine, wobei es gar nicht nötig ist, die Maschine im einzelnen zu kennen. Man läßt einfach die betreffende Maschine — oder irgendwelche beliebige Vorrichtung, an welcher Kräfte einander das Gleichgewicht halten können — eine „virtuelle Verrückung" machen, d. h. eine Bewegung, die beim Arbeiten der Vorrichtung vorkommt. Man mißt dann die Wege, welche die Angriffspunkte der beiden Kräfte, die einander Gleichgewicht halten oder gegeneinander arbeiten sollen, in Kraftrichtung beschreiben. Das umgekehrte Verhältnis dieser beiden Wege gibt dann das Verhältnis der beiden Kräfte für den Fall des Gleichgewichts, d. i. das Übersetzungsverhältnis der Maschine (Beispiele s. unter 92, 102).

Wirken mehr als zwei Kräfte an dem Mechanismus, so muß für den Fall des Gleichgewichts die Summe aller Produkte aus den Wegen der Angriffspunkte und den zugehörigen Kräften — jedes Produkt mit seinem Vorzeichen — gleich Null sein. Denn diese Summe stellt die Gesamtänderung der Arbeit dar, welche Änderung im Fall des Gleichgewichts Null sein muß.

Der Satz hat den Namen des „Prinzips der virtuellen Verrückungen" oder auch der „virtuellen Arbeit"; er sagt dasselbe wie die Sätze von Kraft und Weg (88) oder von der Arbeit (90).

92. Keil und Schraube sind offensichtlich nur besondere Anwendungsformen der schiefen Ebene.

Der Keil ist eine schiefe Ebene, die, statt festzustehen, selbst verschoben wird, während der Angriffspunkt der Kraft, gegen welche gearbeitet werden soll,

am Mitmachen der Verschiebung gehindert ist. Schiebt man den Keil um seine ganze Länge vor, so fördert er um seine Dicke. Sein Übersetzungsverhältnis ist daher (91) das Verhältnis von Dicke zu Länge.

Die Schraube ist eine auf einen Zylinder gewickelte schiefe Ebene (vgl. Abb. 12). Um die Gleitbahn zu ergeben, müssen die „Schraubengänge" in die „Spindel" geschnitten (vertieft) sein. Als Gleitstück dient die „Mutter" der Schraube. Dreht man die Spindel einmal um ihre Achse, so fördert sie um eine Ganghöhe (a b, Abb. 12). Das Übersetzungsverhältnis ist also gleich dem Verhältnis Ganghöhe : Umfang. Trägt, wie z. B. bei der Schraubenpresse, die Spindel noch einen Hebel, so kommt dessen Übersetzungsverhältnis noch hinzu; doch findet man einfach das Gesamtübersetzungsverhältnis als Verhältnis der Ganghöhe zum Wege, den der Angriffspunkt der Kraft am Hebel bei einer Umdrehung der Schraube beschreibt (91).

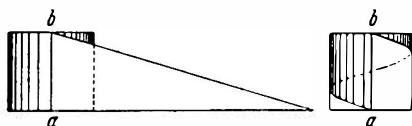


Abb. 12. Schraube.

Das Übersetzungsverhältnis der Schraube kann bei kleiner Ganghöhe leicht sehr groß sein; sie ist daher besonders geeignet zur Ausübung sehr großer Kräfte mittels kleiner Kräfte. Entsprechend langsam fördert sie aber dann auch, wie es nach dem Satz von der Arbeit (90) sein muß.

93. Die Hebelgruppe der Maschinen. — Hebel, Rolle und Wellrad — ist gekennzeichnet durch das wesentliche Hervortreten von Drehbewegung im Gegensatz zu der von uns bisher fast allein betrachteten fortschreitenden Bewegung.

Hebel ist ganz allgemein jede um eine gegebene Achse drehbare Vorrichtung, an welcher verschiedene Kräfte einander das Gleichgewicht halten können. Hierbei ist eine Fülle von Anwendungen einbegriffen, von der einfachen Stange, die unter eine zu hebende Last geschoben wird, bis zur Waage und anderen feinen Hebelvorrichtungen.

Um das Gesetz für das Gleichgewicht von Kräften am Hebel — das Hebelgesetz — zu finden, sei ein beliebig geformter fester, um eine Achse drehbarer Körper als Hebel betrachtet (Abb. 13), an welchem zwei Kräfte, K_1 und K_2, angreifen. Die Achse befinde sich irgendwo senkrecht zur Ebene der beiden Kräfte und somit auch senkrecht zur Zeichenebene.

Daß wir keine Kräfte angenommen haben, die aus einer senkrecht zur Achse stehenden Ebene heraustreten, beeinträchtigt nicht die Allgemeingültigkeit unserer Überlegung. Wäre eine solche Kraft vorhanden, so würden wir sie zerlegen in eine Komponente senkrecht zu dieser Ebene und eine in der Ebene, und es wäre nur die letztere weiter zu beachten, da die erstere (wegen Zusatzkräften, 87) überhaupt keine Drehung um die vorgesehene Achse hervorbringen könnte und also zur Frage nach dem Gleichgewicht nichts beizutragen hätte.

Die Frage nach dem Gleichgewicht stellen wir nun in der Form: Wo muß die Achse liegen, damit K_1 und K_2 keine Bewegung hervorbringen? Es wird letzteres stattfinden, wenn die Resultierende aller zusammenwirkenden Kräfte Null ist. Um K_1 und K_2 zu einer Resultierenden zu vereinigen, reicht der Parallelogrammsatz nicht aus; denn er bezieht sich nur auf Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Es ist daher notwendig noch den folgenden Satz zu Hilfe zu nehmen.

94. Satz für Kräfte an festem Körper. — Dieser besondere Erfahrungssatz ist an sich wichtig, indem er auf alle Fälle des Angreifens

von Kräften an festen Körpern sich bezieht. Der Satz sagt: Daß an der Wirkung der Kraft nichts geändert wird, wenn man ihren Angriffspunkt an dem festen Körper beliebig in Kraftrichtung verlegt. Die Richtigkeit des Satzes kann an jedem Seil oder Faden ersehen werden, mittels dessen eine Kraft auf einen festen Körper wirken kann: Die Erfahrung zeigt, daß es gleichgültig ist, ob der Faden länger oder kürzer genommen wird, an dessen einem Ende die Kraft angreift, während sein anderes Ende an dem festen Körper befestigt ist. Der Faden verhält sich dabei auch selber als fester Körper, und es ist auch gleichgültig wo in seiner eigenen Linie, d. i. in Kraftrichtung, seine Befestigung statthat.

95. Hebelgesetz. — Wir wenden den Satz auf den betrachteten Hebelkörper (93, Abb. 13) an, indem wir die Angriffspunkte beider Kräfte, K_1 und K_2, an den Schnittpunkt p ihrer eigenen Richtungen verlegen. Es sind dann die Kräfte K_1 und K_2 ohne Änderung der Wirkung vollkommen ersetzt durch die gleichgroßen Kräfte K'_1 und K'_2, die nun beide p zum Angriffspunkt haben. Nun kann der Parallelogrammsatz angewendet werden, wodurch beide Kräfte — und daher auch die ursprünglich gegebenen Kräfte — durch die eine Kraft K ersetzt werden. Bringt K keine Bewegung hervor, so werden es also auch die ursprünglich gegebenen Kräfte nicht tun, und es wird Gleichgewicht sein. Dies wird aber der Fall sein, wenn die Achse, senkrecht zur Zeichenebene stehend, irgendwo in der geraden Linie von K sich befindet, z. B. in A. Denn man könnte den Angriffspunkt p der Resultierenden K ohne Änderung der Wirkung nach A verlegen (94) und da A, wie die ganze Achse, unverschieblich ist, kann keine Bewegung erfolgen. Dabei kann wieder bedacht werden (73, 87), daß dies Ergebnis nur nach einer (im allgemeinen kleinen) elastischen Durchbiegung der Achse und ihrer Lager erfolgt, wobei eine K an Größe gleiche, an Richtung entgegengesetzte elastische Kraft geweckt wird, welche zusammen mit K und also auch mit den ursprünglich gegebenen Kräften K_1 und K_2 die Gesamtresultierende Null ergibt.

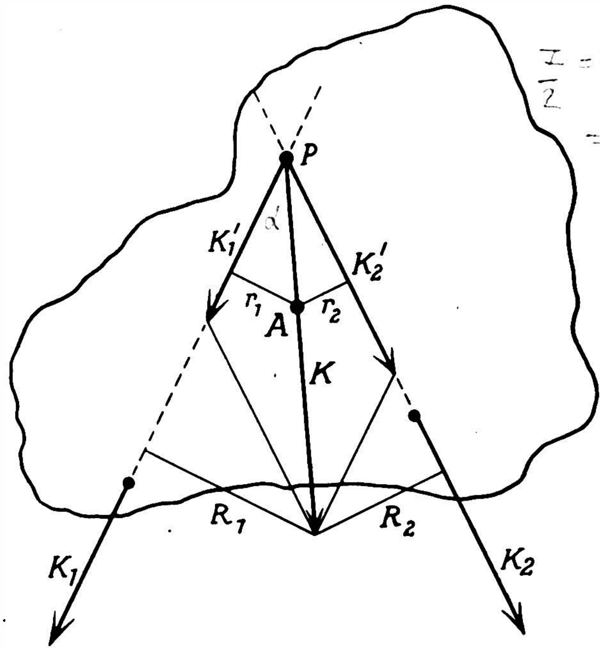


Abb. 13. Hebel.

Wir haben somit als Bedingung des Gleichgewichts, daß die Achse irgendwo in der Resultierenden der Kräfte liegen muß. Um dem Satz eine besser brauch-

bare Form zu geben, ziehen wir die auf die Kraftrichtungen senkrecht stehenden Linien R_1 und R_2, sowie r_1 und r_2. Da sowohl $R_1 . K'_1$ als auch $R_2 . K'_2$ gleich dem Flächeninhalt des Parallelogramms ist, so muß $R_1K'_1 = R_2K'_2$, also auch $R_1K_1 = R_2K_2$ sein, oder $K_1 : K_2 = R_2 : R_1$. Nach der Ähnlichkeit leicht ersichtlicher Dreiecke ist aber $R_1 : R_2 = r_1 : r_2$ und somit auch

$$K_1 : K_2 = r_2 : r_1. \qquad 95)$$

Dies ist das Hebelgesetz in einer seiner Formen.

Es haben r_1 und r_2 den Namen „Hebelarme" der Kräfte K_1 und K_2; Hebelarm ist immer der senkrechte Abstand der Kraftrichtung von der Drehachse. Sind Achse und Kraftrichtungen am Hebel gegeben, so sind auch die Hebelarme leicht ermittelbar, und es ist demnach das Hebelgesetz stets leicht anwendbar. Es sagt in Worten aus, daß Gleichgewicht am Hebel stattfindet, wenn die Kräfte im umgekehrten Verhältnis ihrer Hebelarme stehen. Oder: das Übersetzungsverhältnis des Hebels ist gegeben durch das Verhältnis seiner Arme.

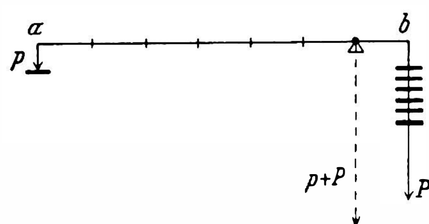


Abb. 14. Gradliniger Hebel.

Sind die wirkenden Kräfte Schwerkräfte und somit einander parallel (Abb. 14), so fallen die Hebelarme in eine einzige horizontale Linie zusammen („gradliniger Hebel"), und für diesen Fall war das Gesetz schon Archimedes bekannt. Es ist in Abb. 14 $P : p = 6 : 1$, und da die Hebelarme wie $1 : 6$ sind, besteht Gleichgewicht.

96. Drehmoment. — Eine andere, wichtige Form nimmt das Hebelgesetz an, wenn man in Gl. 95 äußere und innere Glieder miteinander multipliziert. Man erhält

$$K_1 r_1 = K_2 r_2. \qquad 96a)$$

Jetzt erscheint jede Kraft im Produkt mit ihrem eigenen Hebelarm. Dies Produkt wird Drehmoment genannt. Stets ist

$$\text{Drehmoment} = \text{Kraft} \cdot \text{Hebelarm}. \qquad 96)$$

Schon Leonardo kannte den Begriff des Drehmoments.

Das Hebelgesetz lautet nun, daß Gleichgewicht besteht, wenn die beiden Drehmomente einander gleich sind. „Entgegengesetzt gleich" ist genauer gesagt, weil die eine Kraft rechts herum, die andere links herum drehend wirkt. Dies kommt besser zum Ausdruck, wenn man Gl. 96a schreibt

$$K_1 r_1 - K_2 r_2 = 0, \qquad 96b)$$

wobei der Drehsinn jedes der beiden Drehmomente mit seinem Vorzeichen richtig zur Geltung kommt.

Dies ist die wichtigste Form des Hebelgesetzes: Es muß für Gleichgewicht die Summe der vorhandenen Drehmomente, jedes mit seinem Zeichen genommen, Null sein. Diese Summe wird auch das resultierende Drehmoment oder Gesamt-Drehmoment genannt.

In dieser Form gilt das Hebelgesetz auch für den Fall beliebig vieler, an demselben Hebel angreifender Kräfte.

Beispielsweise ist in Abb. 15 Gleichgewicht, weil die ersichtlichen Hebelarme der 3 Gewichte 1, 3 und 6 so gewählt sind, daß $-1 \cdot 6 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 3 = 0$ ist,

wobei linksherum wirkende Drehmomente negativ, das rechtsherum wirkende positiv gerechnet sind.

97. Allgemeine Bedeutung des Drehmoments. — Daraus, daß die Summe der Drehmomente — das Resultierende oder Gesamtdrehmoment — bestimmend ist für das Eintreten oder Nichteintreten von Drehung, ist unmittelbar die wichtige Bedeutung des Drehmoments für alle Drehbewegung ersichtlich.

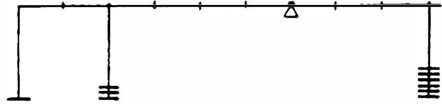


Abb. 15. Drehmomente.

Für die fortschreitende Bewegung ist die Kraft allein maßgebend; für die Drehbewegung tritt an ihre Stelle das Produkt aus Kraft und Arm, das Drehmoment.

Man kann demnach in bezug auf Drehung eine große Kraft ersetzen durch eine kleine, wenn man letzterer einen entsprechend großen Arm gibt, weil es einerlei ist mittels welches seiner beiden Faktoren das Drehmoment groß wird. Man nennt daher den großen Hebelarm auch den günstigen Hebelarm, was bei vielen Werkzeugen, wie der Zange usw., eine alltägliche Rolle spielt.

98. Arbeit auch beim Hebel nicht geändert. — Mit dem großen Hebelarm ist aber auch der große Weg verbunden; denn Kreisbögen und Radien sind einander proportional. Man muß also auch beim Hebel an Weg zugeben was an Kraft gespart wird, und umgekehrt ist mit verkleinertem Weg vergrößerte Kraft verbunden; es gilt also wieder, wie bei der schiefen Ebene, der Satz von Kraft und Weg (88) und die Unveränderlichkeit der Arbeit (90).

Damit ist ersichtlich, wie das mittels des Kräfteparallelogramms und des Hilfssatzes 94 gefolgerte Hebelgesetz auch mit der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zusammenhängt (vgl. 90).

99. Als Hebel wirken auch die Knochengerüste der Lebewesen. Die Muskeln haben an denselben stets den ungünstigen, kleinen Hebelarm; sie sind dementsprechend darauf eingerichtet, mit sehr großen Kräften, doch nur auf kleine Wegunterschiede sich zusammenzuziehen.

100. Die Waage als Hebelvorrichtung. — Die gewöhnliche Waage soll ein gleicharmiger Hebel sein, damit die Gewichtsstücke das zu wiegende Gewicht unmittelbar richtig angeben. Wichtig ist, daß die Arme am Waagebalken scharf begrenzt sind, was gewöhnlich durch Schneiden geschieht. Bei Schneidenaufhängung der Schalen ist es selbstverständlich, daß es gleichgültig ist, wo auf der Schale Gewichtsstücke oder zu wiegende Gegenstände zu liegen kommen; denn der Angriffspunkt des Gesamtgewichts der Schale liegt doch immer in der Schneide. Man kann aber auch in anderer Weise diese wichtige Bedingung der Einflußlosigkeit der Gewichtsverteilung auf den Schalen gesichert erfüllen, z. B. bei der Tafelwaage, die keine hängenden Schalen hat. Es kommt nach dem Satz von Kraft und Weg (88, 91) nur darauf an, daß die Schalen bei den Gebrauchsbewegungen der Waage reine Parallelverschiebungen ausführen. Heben und senken sich alle Punkte beider Schalen stets um gleich viel, so wird sie als gute gleicharmige Waage wirken, ganz gleichgültig durch welchen Mechanismus diese Parallelbewegung gesichert ist.

Ebenso ist die Bedingung für eine Dezimal- bzw. Zentesimalwaage nur diese, daß die für die zu wiegende Last bestimmte Fläche eine Parallelverschiebung ausführt, die $^1/_{10}$ bez. $^1/_{100}$ der Parallelverschiebung der Gewichts-Schalen beträgt.

Es gibt auch Waagen, die statt des Gewichtssatzes ein einziges Laufgewicht benutzen; dieselben variieren und bemessen das immer allein maßgebende Drehmoment durch den Faktor Hebelarm statt durch den Kraftfaktor.

101. Rolle und Wellrad sind offensichtlich nur besondere Formen des Hebels.

Die einfache **Rolle** (Abb. 16) ist der gleicharmige Hebel, eingerichtet auf fortlaufende Drehung bei stets unveränderten Kraftrichtungen. Der bloß aus einer Stange a b bestehende Hebel (Abb. 17) versagt hierbei, indem ein resultierendes Drehmoment $(P_2 - P_1)r$, mit welchem gearbeitet werden soll, alsbald mit seinen Hebelarmen sich verringert. Schon nach der Drehung um den Winkel α ist es nur mehr $(P_2 - P_1)r'$, und wenn $\alpha = 90^0$ geworden ist, ist es wegen gänzlichen Verschwindens des Hebelarmes zu Null herabgesunken. Dies wird verhindert durch Anwendung der Rolle mit dem Radius r und darumgelegten Faden oder Seil, an welchem P_1 und P_2 angreifen, wobei der Hebelarm stets unverändert seine Größe r behält.

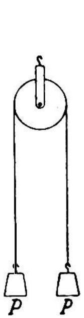


Abb. 16. Rolle.

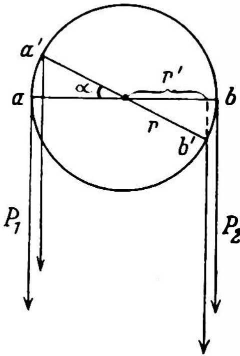


Abb. 17. Rolle.

Die einfache Rolle erlaubt nur die Richtung einer gegebenen Kraft abzuändern, und wir haben sie dazu schon bei der Prüfung des Parallelogrammsatzes verwandt gedacht (79, Abb. 7).

102. Eine Verbindung mehrerer Rollen heißt **Flaschenzug** und ist sehr geeignet zu weitgehender Abänderung auch der Größe einer Kraft.

In Abb. 18 zieht die Kraft 2 P an zwei Teilen des um beide Rollen laufenden Fadens, so daß jeder Teil und damit der ganze Faden nur mit 1 P gespannt ist und also durch 1 P an seinem freien Ende auch in Ruhe gehalten werden kann. Das Übersetzungsverhältnis ist demnach 1 : 2.

In Abb. 19 hängt die Last an 6, über die leicht beweglichen Rollen gleich sich spannenden Fadenteilen; das Übersetzungsverhältnis ist 1 : 6.

Im allgemeinen wird man zur Ermittelung des Übersetzungsverhältnisses eines etwa nicht übersichtlich gebauten Flaschenzuges den Satz von der Arbeit zu Hilfe nehmen (91), d. h. man wird an dem Seilende ziehen; hat man 1 m gezogen und würde dabei das Lastende nur um 1 cm sich bewegt haben, so hätte man das Übersetzungsverhältnis 1 : 100.

103. Das **Wellrad**, bei alten Brunnen und als „**Winde**“ im Bauwesen und auf Schiffen in Benutzung, ist der auf Dauerdrehung eingerichtete ungleicharmige Hebel.

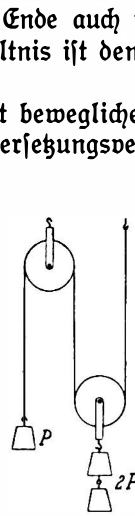


Abb. 18. Flaschenzug.

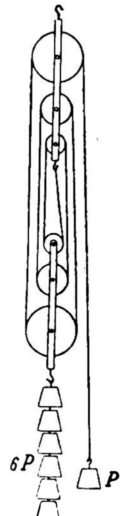


Abb. 19. Flaschenzug.

Oft werden mehrere Wellräder miteinander verbunden, was durch **Verzahnung** oder auch durch um die Räder gelegte endlose **Riemen** geschehen kann. Jedes Uhrwerk bietet ein Beispiel hierfür, und fast in jeder Fabrik sind Riemenübertragungen zu sehen.

Man nennt solche Mechanismen auch **Vorgelege**; sie sind zwischen der

die Arbeit liefernden Maschine — dem Motor — und der Arbeitsverbrauchsstelle eingeschaltet und zwar nicht nur um — wie Riemen oder lange Achsen — die Arbeit auf einige Entfernung hin zu übertragen, sondern auch um sie passender zusammenzusetzen als der Motor sie liefert.

Treibt z. B. eine große, langsam laufende Dampfmaschine eine Spinnerei oder Weberei, in welcher schnell, aber mit nur kleinen Kräften bewegte Teile laufen sollen, so kann das durch genügend wiederholte Riemenübertragung von großen auf kleine Räder erreicht werden. Der umgekehrte Fall liegt z. B. vor, wenn ein nur auf schnelle Bewegung mit verhältnismäßig kleiner Kraft eingerichteter Elektromotor einen Aufzug für große Lasten treiben soll. Für diesen ziemlich extremen Fall ist die „Schraube ohne Ende" oder das „Schneckengetriebe" von Vorteil, bestehend aus einer Schraube, die tangential in ein Zahnrad eingreift, dessen Zähne als Mutter der Schraube dienen. Macht die Schraube eine Umdrehung, so rückt das Zahnrad um einen Zahn weiter. Hat also das Rad beispielsweise 100 Zähne, so hat man, bei gleichen Hebelarmen an Schraube und Rad, schon das Übersetzungsverhältnis 1 : 100; die Kraft des Motors wird also verhundertfacht, zugleich die Bewegung hundertmal langsamer.

Bei Riemenübertragung berechnet man das Übersetzungsverhältnis stets leicht aus den Radien der Räder, bei Verzahnung auch aus den Zahnzahlen, die den Radien der ineinander greifenden Räder proportional sein müssen.

Schwerpunkt.

104. Ein besonderes Problem der Statik ist die Zusammensetzung vieler, einander paralleler Kräfte, die an einem festen Körper angreifen. Das Problem bietet sich bei jedem der Schwere unterworfenen festen Körper. Denn die Schwerkraft wirkt auf jedes Atom des Körpers (69); welches aber das Verhalten des ganzen Körpers unter dem Einfluß seiner eigenen Schwere sein wird, dies hängt von der Resultierenden aller seiner Einzelschwerkräfte ab. Das Problem der Ermittelung einer solchen Resultierenden, im besonderen ihres Angriffspunktes am Körper — Schwerpunkt genannt — ist daher von allgemeiner Wichtigkeit. Schon Archimedes hat es weitgehend bearbeitet.

105. Zwei parallele Kräfte an festem Körper. — Will man beliebig viele parallele Kräfte zusammensetzen, so genügt es, eine Regel für zunächst zwei solcher Kräfte zu haben; die übrigen können dann der Reihe nach hinzugefügt werden. Die Regel für zwei Kräfte ist aber unmittelbar aus dem Hebelgesetz zu entnehmen. Der geradlinige Hebel (Abb. 14) ist bereits ein fester Körper, an dem zwei parallele Kräfte, p und P angreifen und wobei aus der Überlegung des allgemeinen Falles (95) bereits klar wurde, daß im Gleichgewichtsfall der Angriffspunkt der Resultierenden in der Achse liegt. Da für den Gleichgewichtsfall das Hebelgesetz maßgebend ist, so hat man das Ergebnis, daß zwei parallele Kräfte, welche an den Punkten a und b (Abb. 14) am festen Körper angreifen, eine Resultierende haben, deren Angriffspunkt den Abstand a b im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte teilt. Daß die Richtung der Resultierenden dieselbe ist, wie

die der gegebenen Kräfte, und daß ihre Größe gleich ist der Summe der Größen dieser Kräfte, gehört dazu, ist aber auch nahezu selbstverständlich.

Wichtig ist, daß dieser Satz über die Lage des Angriffspunktes nicht etwa beschränkt ist auf den Fall einer zur Verbindungslinie a b der Einzelangriffspunkte senkrechten Kraftrichtung. Er gilt vielmehr ganz allgemein; denn ist die Kraftrichtung auch beliebig schief zu a b (Abb. 20), so wird doch bei der dem Satz entsprechenden Teilung von a b auch der die wirksamen Hebelarme darstellende senkrechte Abstand a′ b′ der Kräfte im gleichen Verhältnis geteilt, was aus der Ähnlichkeit der Dreiecke a c a′ und b c b′ leicht ersichtlich ist und worauf es ankommt. Ebenso bleibt der Angriffspunkt c der Resultierenden auch dann gültig, wenn die in a und b angreifenden Einzelkräfte p und P ihre Richtung gemeinsam beliebig ändern; denn das Verhältnis der Hebelarme bleibt dabei immer dasselbe. **Der Angriffspunkt der Resultierenden ist also unabhängig von der Richtung der parallelen Einzelkräfte**, wenn nur deren Größen und Angriffspunkte ungeändert bleiben, und es gilt daher der obige Satz für die Zusammensetzung zweier paralleler Kräfte unter allen Umständen.

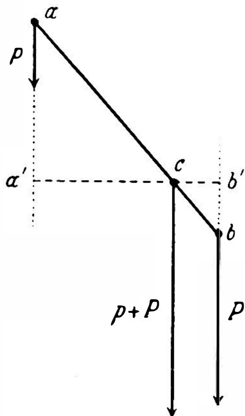


Abb. 20. Zusammensetzung paralleler Kräfte.

Es ist selbstverständlich, daß der Satz auch umgekehrt **zur Zerlegung gegebener Kräfte in parallele Komponenten** benutzt werden kann. Liegt z. B. eine gegebene Last auf einer Brücke oder einer Stange, die an beiden Enden unterstützt ist, so kann man leicht nach dem Satze angeben, mit welchen Kräften die beiden Enden je nach Lage der Last auf die Unterlagen wirken.

106. Schwerpunkt. — Setzt man nach diesem Satz der Reihe nach sämtliche Einzelschwerkräfte, die an einem festen Körper angreifen — gegeben durch die Gewichte aller seiner Teile — zusammen, so erhält man als Angriffspunkt der Resultierenden den gesuchten Schwerpunkt des Körpers. An diesem Punkt greift das Gesamtgewicht des Körpers an, und da die Resultierende vollkommener Ersatz aller Einzelkräfte ist, so **wird der Körper unter dem Einfluß der Schwerkraft so sich verhalten, als wäre das Gesamtgewicht des Körpers in dem einen Punkt, dem Schwerpunkt, vereinigt**, während alle anderen Teile des Körpers nur gewichtsloses Gerüst sind. Die Kenntnis des Schwerpunkts vereinfacht in dieser Weise sehr die Behandlung aller Fragen, welche die Wirkung der Schwere des Körpers betreffen, was nachher an einigen Beispielen zu zeigen ist (110, 111).

Der Schwerpunkt eines festen, in sich unbeweglichen Körpers ist stets **festliegend am Körper**, wenn er auch nicht immer in dessen Inneren liegt.

Wendet man den Körper, so daß die stets nach unten gerichtet bleibenden Schwerkräfte seiner Teile in ihm sich wenden müssen, so bleibt der von der Richtung der Kräfte unabhängig gefundene Angriffspunkt (105) der Resultierenden doch in ungeänderter Lage am Körper. Der in irgendeiner Lage des Körpers gefundene Schwerpunkt gilt also einheitlich für alle Lagen.

107. Der Schwerpunkt kann als der mittlere Ort aller Gewichtsteile des Körpers bezeichnet und danach auch gefunden werden; es ist das nur eine etwas veränderte Anwendung des Satzes 105. Die hier folgenden Beispiele, sowie die allgemeine Überlegung 108 zeigen dies.

Der Schwerpunkt einer in der ganzen Länge gleichbeschaffenen — „homogenen" — Stange liegt in deren Mitte; denn man kann sie aus gleichlangen und daher auch gleichschweren Stücken bestehend denken und vom Gewichte je zweier derselben, die symmetrisch zur Mitte liegen, die Resultierenden nehmen, die in der Mitte angreifen, und dann alle diese in der Mitte angreifenden Resultierenden addieren.

Ähnlich kann man die Bildung der Resultierenden nach dem Satz 105 in vielen anderen Fällen so übersichtlich gestalten, daß das Ergebnis — der mittlere Ort aller Gewichtsteile — ohne weiteres ersichtlich wird. Der Schwerpunkt eines homogenen Kreisringes liegt, ebenso wie der einer Kreisscheibe oder einer Kugel, im Mittelpunkt. Das Beispiel des Ringes zeigt dabei, wie der Schwerpunkt auch außerhalb des Körpers zu liegen kommen kann, doch immer so, daß er in fester Lage zum Körper bleibt.

Um den Schwerpunkt einer homogenen Dreiecksfläche a b c zu finden, kann man dieselbe parallel a b in Streifen zerlegt denken (Abb. 21), deren jeder seinen Schwerpunkt in der Mitte hat. Es ist dann das Dreieck zunächst durch die an jedem ihrer Punkte mit dem Gewichte des zugehörigen Streifens belegte Seitenhalbierende c c′ ersetzt, und es ist nur mehr der Schwerpunkt dieser ungleich mit Gewichten belegten Geraden zu suchen. Derselbe, und somit auch der Schwerpunkt des Dreiecks, muß als mittlerer Ort der Gewichtsteile irgendwo auf dieser Geraden liegen und zwar näher dem schwereren Ende c′. Um ohne Rechnung weiterzukommen, ist nur zu bedenken, daß der Schwerpunkt ebenso auch auf der Seitenhalbierenden b b′ liegen muß, daß er also, weil es nur einen einzigen Schwerpunkt gibt, nur auf dem Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden liegen kann (woraus auch folgt, daß die dritte Seitenhalbierende ebenfalls durch S gehen muß).

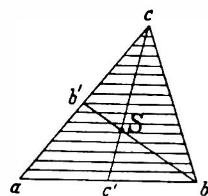


Abb. 21. Schwerpunkt.

108. Rechnung mit Raumelementen. — In jedem Falle eines geometrisch wohldefinierten Körpers kann der Schwerpunkt als mittlerer Ort der Gewichtsteile auch durch bloße Rechnung gefunden werden. Auf die Atome des Körpers zurückzugehen ist dabei niemals nötig, sondern man denkt den Körper in gleichgroße würfelförmige „Raumelemente" zerlegt.

Die Gewichte aller n Raumelemente, $p_1, p_2, p_3, \ldots p_n$ müssen gegeben sein, die Lagen der Raumelemente seien durch ihre Des Cartes'schen Koordinaten $x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, \ldots y_n, z_1 \ldots z_n$ gegeben[1]). Dann gilt für die Koordinate X des Schwerpunkts die Gleichung

$$X = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots\cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}, \qquad 108)$$

und ganz Entsprechendes gilt für seine beiden anderen Koordinaten Y und Z. Der Nenner ist hierbei das Gesamtgewicht des Körpers. Die Gleichung kann in Worten auch so gefaßt werden:

---

[1]) Man nehme einen festen Punkt an („Anfangspunkt des Koordinatensystems") und lege durch ihn 3 aufeinander senkrechte Ebenen. Die drei senkrechten Abstände irgendeines Raumpunktes von diesen „Koordinaten-Ebenen" sind dann Des Cartes „Koordinaten" dieses Punktes. Ihre Angabe bestimmt eindeutig die Lage des Punktes im Raum. Parallel zu den 3 Koordinatenebenen sind die Schnitte zu denken, welche den Körper in seine Raumelemente zerlegen.

Jede der Koordinaten des Schwerpunkts ist das mit den Gewichten genommene Mittel der betreffenden Koordinaten aller Raumelemente des Körpers, und dies entspricht ganz der Regel für die Zusammensetzung der parallelen Kräfte (105), wovon man sich durch Rechnung mit nur 2 schweren Raumelementen überzeugt[1]).

Solche „Mittelnahme mit Gewichten" kommt auch zur Anwendung, wenn irgendeine Größe wiederholt gemessen worden ist, jedoch mit verschiedener Genauigkeit. Man legt dann den Einzelergebnissen $x_1 \dots x_n$ der n-Messungen je nach deren Genauigkeit verschiedene „Gewichte" $p_1 \dots p_n$ bei und rechnet nach Gl. 108, um einen der Wahrheit möglichst naheliegenden Wert der gemessenen Größe zu finden. Die hierbei durch die Gleichung zur Geltung gebrachte Annahme ist, daß der wahre Wert um so näher den genaueren Messungsergebnissen liegen wird, je genauer sie sind. Ebenso liegt nach dem Satze 105 der Schwerpunkt eines Körpers den schwereren Raumelementen um so näher, je schwerer sie sind. Sind die Gewichte $p_1 \dots p_n$ alle einander gleich, so gibt Gl. 108 das gewöhnliche (ohne Gewichte genommene) Mittel der x, nämlich deren Summe geteilt durch ihre Anzahl.

Zu beliebig gesteigerter Genauigkeit der Schwerpunktsberechnung nach Gl. 108 wird man die Raumelemente unendlich klein annehmen, wobei ihre Zahl unendlich groß wird. Die Summe im Zähler enthält dann unendlich viele unendlich kleine Summanden (vgl. 39). Auf die Berechnung solcher Summen, Integrale genannt, ist die Infinitesimalrechnung eingerichtet.

So kann beispielsweise leicht die Lage des Schwerpunkts einer homogenen Halbkugel berechnet werden; man findet, daß er $^3/_8$ Radius Abstand vom Kugelmittelpunkt hat.

109. Experimentelle Ermittelung des Schwerpunktes. — Bei geometrisch nicht wohldefinierten Begrenzungen eines gegebenen Körpers kann sein Schwerpunkt, wie überhaupt in jedem Falle, leicht experimentell ermittelt werden. Man hänge den Körper an irgendeinem seiner Punkte a an einem Faden f_1 auf (Abb. 22). Der Schwerpunkt muß dann, als Angriffspunkt der Schwerkraft an dem Körper, möglichst tief sich einstellen, d. h. er muß in der Verlängerung des Fadens f_1 sich finden. Man bezeichne also diese Verlängerung a a′ an dem Körper, hänge ihn dann an einem anderen Punkte b auf und zeichne wieder die Fadenverlängerung b b′. Beide Verlängerungen enthalten den Schwerpunkt; sie müssen sich also schneiden, und der Schnittpunkt S ist der gesuchte Schwerpunkt.

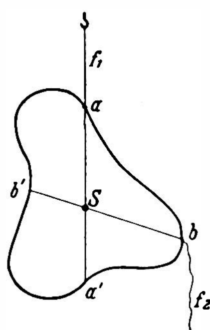


Abb. 22. Schwerpunkt experimentell ermittelt.

110. Bewegungsmöglichkeiten unter dem Einfluß der Schwere. — Ein Körper kann unter dem Einfluß seiner Schwere nur solche Bewegungen ausführen, bei welchen der Schwerpunkt, der Angriffspunkt der nach unten gerichteten Schwerkraft, sinkt. Wohl kann gelegentlich der ganze Körper infolge seiner Schwere steigen, es kann z. B. eine Walze (mit exzentrisch gelegenem Schwerpunkt) längs einer schiefen Ebene hinauflaufen, aber nur insofern und solange ihr Schwerpunkt dabei sinkt.

Eine an zwei Punkten frei aufgehängte gleichmäßig beschaffene Kette (wie A C in Abb. 9a) muß diejenige Form annehmen, bei welcher ihr Gesamtschwer-

---

[1]) Man kann auch, um einzusehen, daß die Gl. 108 richtige Koordinaten des Schwerpunktes gibt, ihre beiden Seiten mit dem Gesamtgewicht des Körpers multiplizieren; sie sagt dann (bei der ganz beliebigen Wahl des Anfangspunktes und der Koordinatenrichtungen), daß das Drehmoment des Schwerpunktes um eine beliebig dem Körper gegebene Achse gleich ist dem Gesamtdrehmoment aller Einzelteile des Körpers (96), wie es nach der Bedeutung des Schwerpunktes sein muß.

punkt am tiefsten zu liegen kommt; jede Störung ihrer Form wird den Schwerpunkt heben, wenn auch einzelne Teile der Kette dabei sinken. Man kann die „Kettenlinie" als Linie tiefsten Schwerpunktes definieren.

111. Unterstützung gegen Wirkung der Schwere. — Soll ein Körper unter dem Einfluß seiner Schwere unbewegt bleiben, so muß er so unterstützt sein, daß keine Senkung des Schwerpunktes eintreten kann. Es wird dann unter Mitwirkung der elastischen Kraft der Unterstützung (73) Gleichgewicht eintreten. Es seien einige bemerkenswerte Fälle betrachtet:

Bei Unterstützung mittels einer Achse, um die der Körper sich drehen kann, bemerkt man drei verschiedene Arten von Gleichgewicht, die je nach der Lage der Achse eintreten können: das stabile, das labile und das indifferente Gleichgewicht. Beim ersten liegt die Achse senkrecht über dem Schwerpunkt, beim zweiten senkrecht unter demselben und beim dritten geht sie durch denselben (s. Abb. 23). Man sieht, daß in allen drei Fällen die vorhandene mögliche Bewegung — die Drehung um die Achse A — zunächst den Schwerpunkt S nicht sinken läßt, weshalb die Schwere auch keine Bewegung hervorbringen wird. Es trifft das auch im labilen Gleichgewicht zu (Abb. 23b); denn der Schwerpunkt bewegt sich bei unendlich kleinen Verrückungen hier, ebenso wie beim stabilen Gleichgewicht, nur auf dem horizontalen Teile der ihm vorgeschriebenen Kreisbahn. Man kann auch sagen: die einzig mögliche Bewegung, die Drehung, wird in keinem der drei Fälle eintreten, weil das für Drehung maßgebende Drehmoment überall Null ist, da der Hebelarm der vorhandenen Kräfte Null ist. Der Unterschied der drei Fälle zeigt sich erst bei größeren Verrückungen; hier wird im stabilen Falle der Schwerpunkt gehoben, im labilen gesenkt, im indifferenten weder gehoben noch gesenkt. Deshalb wird eine dem Körper beigebrachte Verrückung im stabilen Falle durch die Schwere wieder rückgängig; im labilen Falle dagegen erfolgt Umkippen in die stabile Gleichgewichtslage; im indifferenten Falle hat die Verrückung das Gleichgewicht überhaupt nicht gestört.

Abb. 23 a stabiles — Abb. 23 b labiles — Abb. 23 c indifferentes Gleichgewicht auf Achse.

Ist der Körper nicht durch eine Achse, sondern auf einem Punkte unterstützt, wie z. B. die Halbkugel Abb. 24a und b oder die Vollkugel Abb. 24c, so kommt es wieder nur darauf an, welche Bewegung der Schwerpunkt beim Eintreten einer möglichen Verrückung macht. Wird er gehoben, wie im Falle 24a, so ist das Gleichgewicht stabil (obgleich hier, im Gegensatz zu Abb. 23a, die Unterstützung unterhalb des Schwerpunktes stattfindet); die Schwere bringt den Körper aus der Verrückung wieder in die alte Lage zurück. Beim labilen Gleichgewicht, Abb. 24b, liegt der Schwerpunkt ebenfalls senkrecht über dem Unterstützungspunkt; aber er wird bei jeder möglichen Verrückung gesenkt, und daher erfolgt das Umkippen in eine stabile Gleichgewichtslage. Beim indifferenten Gleichgewicht, z. B. im Falle der Vollkugel Abb. 24c auf horizontaler Unterlage, wird der Schwerpunkt bei jeder möglichen Verrückung weder gehoben noch gesenkt, weshalb hier die Schwerkraft auch beim Eintreten von Verrückungen einflußlos bleibt.





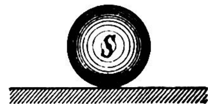


Abb. 24 a stabiles — Abb. 24 b labiles — Abb. 24 c indifferentes Gleichgewicht auf Punkt.

Ist der Körper auf einer Fläche unterstützt, wie z. B. die Halbkugel Abb. 24b, wenn sie auf ihre Kreisfläche gefallen ist, so kommt es wieder nur auf die Bewegung des Schwerpunktes bei möglichen Verrückungen an. Es ist leicht einzusehen, daß Stabilität vorhanden sein wird, wenn das vom Schwerpunkt nach unten gezogene Lot von der wirksamen Unterstützungsfläche umfaßt wird; denn es hat dann jeder Versuch des Umstürzens des Körpers nur eine Hebung des Schwerpunktes zur Folge.

112. Empfindlichkeit der Waage. — Wichtig ist die Kenntnis vom Schwerpunkt auch für die feinere Beurteilung der Waage, dieses Hauptmeßwerkzeuges für Gewichte, für Kräfte überhaupt (67), und für Massen (124). Wir hatten die Waage bisher nur als Hebel betrachtet (100); dadurch wird aber noch nicht die Frage nach der Größe der Empfindlichkeit einer Waage beantwortet. Fügt man auf einer Waagschale ein Übergewicht p hinzu, so wird das Gleichgewicht gestört; es stellt sich jedoch ein neues Gleichgewicht ein, wobei die Zunge der Waage einen Ausschlag zeigt, der bei gegebenem Übergewicht p (z. B. p = 1 mgr) ein Maß für die Empfindlichkeit der Waage abgibt. Um einzusehen, wie die so bemessene Empfindlichkeit von der Bauart der Waage abhängt, ist folgendes zu überlegen.

Das Gleichgewicht einer Waage muß stets stabil sein; denn sie soll, in Bewegung befindlich, immer wieder zur gleichen Ruhelage zurückkehren. Es muß also der Schwerpunkt S (Abb. 25) der beweglichen Teile — Waagebalken mit Schalen, kurz des „Gehänges"[1]) — unterhalb der Mittelschneide A liegen (111). Der Abstand beider sei s. In der Ruhelage ist S senkrecht unter A, was einer bestimmten Zungenstellung der Waage entspricht. Wird nun an der einen Schale das Übergewicht p hinzugefügt, so verschiebt sich der Schwerpunkt des Gehänges in der Richtung nach dem Angriffspunkt a dieses neu hinzugefügten Gewichtsteiles hin, und

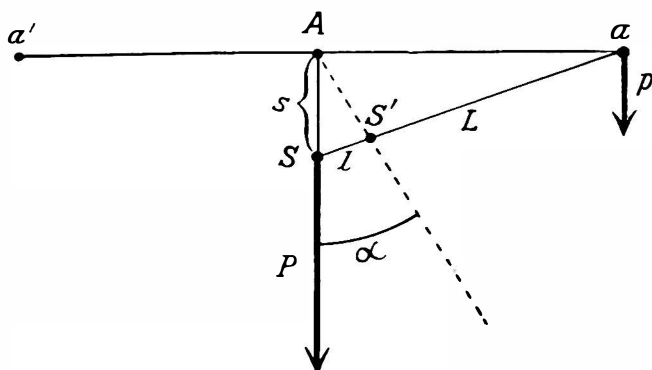


Abb. 25. Waage.

zwar nach dem Satze über die Zusammensetzung paralleler Kräfte (105) um die Strecke l, so daß $l : L = p : P$, wenn P das im ursprünglichen Schwerpunkt S angreifende Gesamtgewicht des Gehänges ist. Die Verschiebung l des Schwerpunktes ist bei der Kleinheit von p sehr klein, so daß L so gut wie gleich der vollen Armlänge A a der Waage wird. Die neue Lage S' des Schwerpunkts bedingt die neue Gleichgewichtslage, bei welcher S' senkrecht unter A zu stehen kommen muß. Der ganze Waagebalken dreht sich daher um den Winkel α, und diesem Winkel wird auch der Zeigerausschlag an der Waage, welcher die Empfindlichkeit bemißt, proportional sein. Wir bemessen den Winkel am Einheitskreis[2]), wonach $\alpha = l/s$, indem die sehr kleine Strecke l so gut wie ein Kreisbogen mit dem Radius s ist, oder, mit l nach obiger Proportion, $\alpha = pL/Ps$.

Diese Gleichung sagt folgendes: Erstens ist der Ausschlag α dem Übergewicht p, das ihn hervorbringt, proportional. Dies ist insofern wichtig, als man aus einem abgelesenen Ausschlag sogleich auf das vorhandene Übergewicht p schließen kann, wenn man einmal das Verhältnis α/p, d. i. den zum Übergewicht 1 mgr gehörigen Ausschlag durch einen Versuch ermittelt hat, was bei feinsten Wägungen, die niemals auf völliges Verschwinden eines Ausschlages ausgehen können, stets benutzt wird um die Zehntel und Hundertstel mgr zu ermitteln. Dieses Verhältnis

---

[1]) Was an den Schneiden a a' hängt, greift mit seiner Schwere, wegen der freien Beweglichkeit um a a', stets an diesen beiden Schneiden an (111, 94). Es ist also, als wäre alles hängende Gewicht an diesen Schneiden befestigt, womit es im Schwerpunkt S richtig berücksichtigt ist.

[2]) Die Winkelmessung am Einheitskreis vermeidet die Einführung einer neuen willkürlichen Grundeinheit, nämlich der Winkelgrade; sie ist deshalb meist besonders zweckmäßig. Maß des Winkels ist hierbei die vom Winkel begrenzte Bogenlänge eines vom Scheitel des Winkels aus beschriebenen Kreises im Verhältnis zum Radius des Kreises.

a/p ist es auch, das man als die „Empfindlichkeit der Waage" bezeichnet; sie ist nach voriger Gleichung

$$\frac{a}{p} = \frac{L}{P} \cdot \frac{1}{s}. \qquad 112)$$

Man hat also zweitens das Ergebnis, daß und wie die Empfindlichkeit einer Waage von den drei Größen abhängt: Länge L der Waagearme, Gewicht P des Gehänges und Abstand s des Schwerpunkts von der Mittelschneide. Mittels dieser drei Größen hat es der Waagenbauer in der Hand, beliebig empfindliche Waagen zu liefern. Dabei müssen die Waagearme L für hochempfindliche Waagen durchaus nicht sehr lang sein; sie können sogar recht kurz sein, da es auf L/P ankommt und da kurze Waagebalken mit sehr viel geringerem Gewicht bei der nötigen Steifigkeit hergestellt werden können, als lange. Der Schwerpunktsabstand s kann gewöhnlich noch an der fertigen Waage durch Hinaufschrauben einer etwas gewichtigen Mutter soweit verringert werden, als es die Güte der Ausführung der Waage (Sicherung des Festbleibens von A und S) verträgt.

113. Wichtig ist es zu wissen, ob die Empfindlichkeit a/p einer Waage unverändert bleibt, wenn eine beiderseitige beliebig große Belastung auf der Waage ist, die das Gewicht P vergrößert, wie es bei jeder Wägung tatsächlich vorkommt. Man findet nach Gl. 112, daß diese erwünschte Unabhängigkeit der Empfindlichkeit von der Belastung dann statthat, wenn die drei Schneiden a A a′ der Waage in einer Ebene liegen. Wird z. B. P durch Schalenbelastung verdoppelt, so verkleinert sich s auf die Hälfte, wodurch a/p ungeändert bleibt. Liegen die Endschneiden tiefer als die Mittelschneide, so sinkt die Empfindlichkeit mit steigender Belastung (was auch wegen der elastischen Durchbiegung des Balkens eintreten kann); liegen die Endschneiden höher, so steigt die Empfindlichkeit, was sogar zu einem Übergang ins indifferente oder labile Gleichgewicht führen kann.

III. Allgemeine Bewegungslehre (Dynamik).

Bewegungsgesetze.

114. Wir fragen jetzt nicht mehr nach den Bedingungen des Gleichgewichts, unter welchen keine Bewegung eintritt; sondern wir fragen was geschieht, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, d. h. wenn eine von Null verschiedene resultierende Kraft vorhanden ist (vgl. 72, 74, 78). Es wird dann der Angriffspunkt dieser Kraft in Bewegung kommen, und wir fragen nach den Gesetzen der Bewegung, die uns erlauben, die Geschwindigkeiten dieses Punktes, die er annehmen wird, und seine Lagen im Raume, die er durchlaufen wird, anzugeben.

Die Auffindung dieser Gesetze ist ganz das Verdienst von Galileo Galilei (1564—1642). Erinnern wir uns des von ihm erkannten Trägheitsgesetzes (55), so haben wir schon den Ursprung auch der weiteren Erkenntnis. Der Trägheit zufolge strebt jeder Körper eine einmal angenommene Geschwindigkeit nach Größe und Richtung beizubehalten. Eine Änderung der Geschwindigkeit erfolgt nur durch Kräfte; diese sind ganz allgemein die Ursachen von Geschwindigkeitsänderungen (62). Wir sehen also: Kraft ist Ursache, Geschwindigkeits*änderung* ist Wirkung. Nicht Kraft und *Geschwindigkeit* gehören zusammen als Ursache und Wirkung; diese oberflächliche Vorstellung ist falsch. Sondern Kraft bedingt Geschwindigkeits*änderung*, d. i. Beschleunigung (50), und es ist nur mehr die Frage, welches der genaue, quantitative Zusammenhang zwischen diesen beiden ist. Das einfachste Mögliche wäre, Proportionalität zwischen Wirkung und Ursache, also zwischen Beschleunigung und Kraft. Dieses einfachste Mögliche ist auch Wirklichkeit, wie noch zu zeigen ist und wie es in der Tat auch sonst immer zutraf, wenn nur die zugrundegelegten Begriffe schon genügend der Wirklichkeit angepaßt waren.

115. *Grundgesetz der Dynamik.* — Die Erfahrungsprüfung der Erwartung, daß die *Beschleunigung proportional der Kraft* sei, durch welche sie hervorgebracht ist, erscheint unmittelbar möglich, da wir sowohl Beschleunigungen als auch Kräfte bereits in festgesetzten Einheiten meßbar gemacht haben (51, 67). Erschwerend tritt nur hinzu, daß die Beschleunigung außer von der Kraft noch von etwas Zweitem abhängt, nämlich von der Größe der *Masse*, auf welche die Kraft wirkt. Da wir aber Masse bereits nach dem Einfluß auf die Beschleunigung definiert haben (57), ist hier der Zusammenhang einfach: Es versteht sich aus der Definition der Masse, daß die *Beschleunigung bei gegebener Kraft stets verkehrt proportional der Masse* ausfallen muß.

Betrachten wir nun Abb. 26, so sehen wir in einfachster Weise alles festgehalten, was zum Grundproblem der Dynamik gehört: Eine Kraft K, gegeben nach Größe und Richtung, wirkt auf eine ebenfalls gegebene Masse m, und es wird nach der Beschleunigung b gefragt, welche diese Masse erfährt. Fassen wir das hierzu bereits Gesagte zusammen, so haben wir die Beschleunigung b proportional K und verkehrt proportional m zu erwarten, oder

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}}, \qquad b = \frac{K}{m}, \tag{115}$$

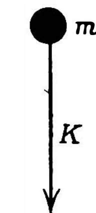


Abb. 26. Kraft und Masse.

wobei ein besonderer, konstanter Proportionalitätsfaktor nicht eingesetzt ist, weil, wie wir weiter sehen werden (131), die Einheit der Massen so gewählt werden kann, daß dieser Faktor Eins wird. Hierdurch ist die Größe b der eintretenden Beschleunigung berechenbar, wenn die Kraft K und die Masse m gegeben sind; was die Richtung der Beschleunigung b anlangt, so fällt sie stets zusammen mit der Richtung der Kraft K.

Gleichung 115 mit ihrem auf die Vorstellung von Abb. 26 bezogenen Sinn ist das Grundgesetz aller Bewegung von Materie nicht nur, sondern von Massen überhaupt (s. E 436, 481, 583).

Eben wegen der ausnahmslosen und umfassenden Gültigkeit des Gesetzes ist es wichtig, den darin maßgebenden Kraftbegriff streng nach Definition (62) festzuhalten (vgl. 195). Man verzichtet sonst auf durchgreifende Naturerkenntnis.

116. Newtons drei Gesetze der Bewegung. — Dieses Grundgesetz hat Newton als „Zweites Gesetz der Dynamik" zur Grundlage aller seiner Forschungen über Himmelsmechanik genommen. Als „Erstes Gesetz" nennt er das Trägheitsgesetz (72); man sieht aber, daß dieses im zweiten Gesetz als Sonderfall enthalten ist. Denn wenn die Kraft $K = 0$ ist, ist nach Gl. 115 auch $b = 0$, d. h. die Geschwindigkeit bleibt ungeändert. Newtons „Drittes Bewegungsgesetz" behandeln wir später (209); es sei aber sogleich bemerkt, daß es unentbehrlich ist, allein schon um für alle Fälle unzweifelhaft anzugeben, wo der Maßstab festsitzen soll, an dem gemessen die nach Gl. 115 berechnete Beschleunigung b gilt. Diese Angabe ist erforderlich, weil sonst die Beschleunigung keinen festen Sinn hat (52). Der Maßstab muß diesem Dritten Gesetz zufolge am gemeinsamen Schwerpunkt der Masse m und derjenigen zweiten Masse festsitzen, an welcher die zur Kraft K gehörige im Dritten Gesetz vorkommende „Gegenkraft" angreift (218).

Man kann das Grundgesetz, Gl. 115, auch in die Differentialform bringen, da $b = dv/dt$ (54),

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{m}, \tag{116a}$$

und Newton bringt es außerdem von vornherein in die Form

$$\frac{d(mv)}{dt} = K, \tag{116b}$$

wodurch es auch dem Fall veränderlicher Massen m (bzw. veränderlicher Trägheitsmomente, vgl. 181, 184, E 480), sowie dem Fall von gruppenweise zu betrachtenden Massen mit verschiedenen Geschwindigkeiten (vgl. 220, 228) angepaßt ist.

Das Produkt mv aus Masse und deren Geschwindigkeit nennen wir mit Newton „Bewegungsgröße“[1]). Man kann dann das Gesetz in der Form aussprechen, daß die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße stets gleich ist der wirkenden Kraft.

117. Sinn der Anwendung des Grundgesetzes. — Wir werden zu allermeist die einfache Form Gl. 115 (oder 116a) des Grundgesetzes benutzen. Es wird sich dabei zeigen, wie es Bewegungsvorgänge von gegebenem Anfangszustand aus vorauszuberechnen erlaubt, wenn nur die wirkenden Kräfte und die Massen gegeben sind[2]).

Die Vorausberechnung erfolgt im allgemeinen von Zeitelement zu Zeitelement (54). Ist eine Anfangsgeschwindigkeit v gegeben, so liefert das Grundgesetz in Gestalt der Beschleunigung b den Zuwachs dv, welchen diese Geschwindigkeit im Zeitelement dt erfährt und damit auch die Geschwindigkeit am Anfang des nächsten Zeitelements und so weiter auf beliebig lange Zeiten hinaus. Aus den so ermittelten Geschwindigkeiten folgen dann aber auch die in den einzelnen Zeitelementen zurückgelegten Wege, womit auch die ganze Bahn der Bewegung, sowie die Einzelheiten dieser selbst bekannt werden. Zur Durchführung solcher Rechnungen mit Zeitelementen ist die Infinitesimalrechnung eingerichtet (vgl. 39, 48, 54, 133), deren Schreibweise in den Formen Gl. 116a und 116b des Gesetzes auch schon benutzt ist.

Wir werden aber in Beispielen sehen, wie man auch ohne Anwendung dieser Rechenweise in allen einfacheren Fällen, dem soeben erläuterten Sinn des Gesetzes folgend, zum Ziele gelangt.

118. Die Erkenntnis des Grundgesetzes aus der Erfahrung war nicht einfach. Es hat dies zwei Gründe:

Erstens wirkt für gewöhnlich nicht eine Kraft allein auf eine zu beobachtende Masse, sondern es sind neben der auf Erden nie fehlenden Kraft der Schwere fast immer noch mindestens Reibungskräfte da. Letztere verhindern sogar ein unmittelbares Erkennen des Trägheitsgesetzes: Eine auf ebener horizontaler Unterlage dahinrollende Kugel kommt allmählich zum Stillstand. Galilei beachtete dies, und er suchte bei seinen Beobachtungen die Reibungskräfte so klein wie möglich zu halten gegenüber der Schwerkraft, deren Wirkungen er untersuchen wollte[3]). Die Schwere war auch in der Dynamik, wie in der Statik (72) die Kraftart, an welcher die ersten und wichtigsten Studien über Kraftwirkungen gemacht wurden.

Zweitens tritt gerade bei Benutzung der Schwerkraft die Schwierigkeit auf,

---

[1]) Es ist neuerdings der Name „Impuls“ dafür eingeführt worden, den wir aber lieber nicht benutzen. Auch „Moment“ wird manchmal gesagt.

[2]) Kraft ist Ursache, Beschleunigung ist Wirkung, und es wird mit dem Grundgesetz aus der Ursache auf die Wirkung geschlossen. Man kann aber auch umgekehrt aus der Wirkung auf die Ursache schließen, also aus einer Beschleunigung die wirkende Kraft berechnen. Es wäre aber verfehlt, Kräfte als bezugsmäßig (relativ) ansehen zu wollen, weil Beschleunigungen es sind (52); vielmehr muß zu richtiger Berechnung aus Beschleunigung die letztere nötigenfalls vorher relativ zu dem durch das dritte Gesetz gegebenen Schwerpunkt umgerechnet werden (relativ zu dem sie im zweiten Gesetz gilt, 116), wodurch eine ursprünglich vielleicht beliebige Relativität der Beschleunigung aus der Kraftberechnung verschwindet.

[3]) Auch wir betrachten die Kräfte der Reibung erst viel später (s. 286), nachdem die wesentlichen Hauptkenntnisse entwickelt sind.

daß von den beiden, die Beschleunigung bestimmenden Faktoren, Kraft und Masse, niemals nur einer für sich allein geändert werden kann. Will man an der Schwere eines zu beobachtenden Körpers etwas ändern, so muß man ihm Gewicht hinzufügen oder wegnehmen, womit aber auch seine Masse geändert wird.

Galilei überwand diese Schwierigkeiten. Wir verfolgen, um dies zu zeigen, seine Studien über die Fallbewegung. Er fand eine Reihe von Sätzen für die freie Fallbewegung der Körper, unter denen wir 3 hervorheben. Wir werden auch alle Folgerungen aus den Sätzen entwickeln und zeigen, wie reich auch sonst der Inhalt der schon von Galilei gewonnenen Kenntnis von Bewegungsvorgängen ist (119—141).

119. Galileis erster Satz vom freien Fall sagt: Alle Körper fallen gleich schnell, ob klein oder groß, leicht oder schwer, und woraus sie auch bestehen mögen. Beobachtungen paarweise von großen Höhen aus losgelassener großer und kleiner Bleikugeln hatten dies schon Stevin gezeigt. Die damals allgemein verbreitete und gelehrte Meinung, daß leichte Körper langsamer fallen als schwere, was jede Flaumfeder verglichen mit einem Stein zeigt, war auch Galilei wohlbekannt. Er erkennt aber bei der Flaumfeder und ähnlichen Körpern die starke Mitwirkung der Reibung in der Luft, die man unmittelbar an der Wirkung von Wind auf diese Körper sehen kann. Die im Verhältnis zum Gewicht sehr große Oberfläche ist es, welche die wesentliche Mitwirkung der Luft bei solchen Körpern bedingt. Galilei verwirft Versuche, bei denen fremdartige, nicht zur Hauptfrage gehörige Dinge mitwirken. Solche Versuche, wie mit der Flaumfeder und dem Stein, sind unrein; er verlangt nach reinen Versuchen, die allein zu einwandfreien Schlüssen berechtigen (Einl. 6). Da ihm die Ausschaltung der Luft noch nicht möglich war[1]), wendet er sich nur an Fallbeobachtungen bei Körpern genügenden Gewichts und kleiner Oberfläche, auf die die Luft genügend wenig Einfluß hat, so wie etwa auf ein 1-Pfundstück und ein 10-Pfundstück, die man von der Höhe eines Turmes nicht merklich verschieden schnell fallen sieht. Galilei schließt, daß auch alle anderen Körper gleich schnell fallen würden, wenn die Luft sie nicht störte, und er bezieht seinen Satz, sowie auch die anderen Sätze (129, 132, 139—141) ausdrücklich auf das Fallen im luftfreien Raum.

120. Es sei bemerkt, daß man auch ohne Luftpumpe leicht einen Versuch anstellen kann, der zeigt, daß Flaumfedern oder ähnliche Körper kein Bestreben haben, langsamer zu fallen als etwa eine schwere Glasflasche. Man tue diese leichten Körper in die Flasche und lasse beide zusammen fallen. Es zeigt sich, daß die leichten Körper auf dem Fallwege keineswegs vom Boden der Flasche aufsteigen — was sie tun müßten wenn sie langsamer fielen als die Flasche —, sondern daß sie (da jetzt die sie umgebende Luft in der Flasche mitfallen muß) unten am Boden der Flasche bleiben[2]).

121. Nachweis des Grundgesetzes aus Galileis erstem Satz vom Fall. — Wenn ein 1-Pfundstück und ein 10-Pfundstück, beide aus Eisen, gleichschnell fallen, so haben wir hierin einen Nachweis der Gültigkeit des Grund-

[1]) Die Luftpumpe wurde erst nach Galileis Tod von Guericke eingeführt.

[2]) Sie schweben während des freien Fallens am Boden der Flasche, ohne ihn zu drücken (138).

gesetzes, Gl. 115. Denn die Kraft, die das Fallen bewirkt, ist beim 10-Pfundstück zwar 10mal so groß als beim 1-Pfundstück; ebenso ist aber auch die Masse 10mal so groß; denn das 10-Pfundstück ist 10mal soviel desselben Stoffes als das 1-Pfundstück; es ist bei ihm daher auch 10mal so viel Trägheit zu erwarten (vgl. 60). Wenn aber Zähler und Nenner in Gl. 115 in gleichem Maße gewachsen sind, fällt die Beschleunigung b unverändert aus, d. h. die beiden Körper erfahren gleiche Geschwindigkeitszuwächse. Danach werden sie aber, wenn sie beide gleichzeitig mit der Geschwindigkeit Null losgelassen sind, beide jederzeit gleiche Geschwindigkeiten haben, also auch gleiche Wege zurücklegen und daher gleichzeitig unten ankommen. Dies aber wird beobachtet, und somit ist diese einfache Beobachtung ein erster Nachweis für die Gültigkeit des Grundgesetzes.

122. Nun betrachten wir aber das gleichschnelle Fallen zweier Körper aus verschiedenem Stoff, z. B. Holz und Eisen. Es seien beide gleich schwer; die Beobachtung ihres gleichschnellen Fallens zeigt, daß sie gleiche Beschleunigungen erfahren. Dies kann aber nach dem Grundgesetz, das wir nun zu einem Schlusse anwenden, nur dann sein, wenn die gleichen Gewichte verschiedener Stoffe auch gleiche Massen (gleiche Trägheit) haben. Dies bedeutet aber, daß Gewicht (Schwerkraft) und Masse (Trägheit) bei allen Körpern, woraus sie auch bestehen mögen, stets einander proportional sind. Es ist dies ein höchst wichtiger Schluß aus dem Grundgesetz und dem gleichschnellen Fall aller Körper auch beliebig verschiedenen Stoffes. Der Schluß hat sich, so wie auch das Grundgesetz, in allem weiteren bewährt.

123. Die in solcher Weise zuerst geschlossene Proportionalität von Gewicht und Masse hat jederzeit, bis heute, bei unbefangenen Geistern Staunen erregt; denn das Wesen sowohl der Gravitationskraft, welche das Gewicht bedingt (59), als auch der Trägheit ist nicht so erkennbar geworden, daß man einen so engen Zusammenhang beider, ja überhaupt einen Zusammenhang hätte aus tieferer Einsicht voraussehen können. Jedoch, der Zusammenhang, jene Proportionalität, hat sich fortlaufend aus der Erfahrung ergeben. Zuerst gefunden in der besagten Weise aus dem gleichschnellen Fall der Körper verschiedenen Stoffes, wurde er dann in immer weiter verfeinerten Weisen nachgeprüft und stets mit aller erreichbaren Genauigkeit bestätigt (172).

Wir werden sogleich eingehen auf die Wichtigkeit der Erkenntnis der Proportionalität von Gewicht und Masse (127, 128); doch seien zuerst einige einfache Folgerungen betrachtet (124—126).

124. Es können nach Feststellung jener Proportionalität Massen einfach mit der Waage verglichen werden („statisch"), statt durch einen der Definition der Masse entsprechenden, aber stets umständlicheren Beschleunigungsversuch („dynamisch", vgl. 58).

125. Dichte. — Man nennt die Masse der Volumeinheit eines Stoffes seine Dichte:

$$\text{Dichte} = \frac{\text{Masse}}{\text{Volum}}. \qquad 125)$$

Man sieht, wegen jener Proportionalität, daß die Dichten der verschiedenen Stoffe durch dieselben Zahlen ausdrückbar sind, wie ihre spezifischen Gewichte (70, Tab. 2) und daß sie ebenfalls mit der Waage ermittelbar sind.

126. Zu bemerken ist jedoch, daß man für Gewicht und Masse nicht ein und dieselbe Einheit benutzen kann, weil die beiden Größen von verschiedener Art sind. Da wir das gr bereits als Grundeinheit für Kräfte, also auch für Gewichte eingeführt haben (67), so kann es im gleichen, irdischen Einheitssystem (68) nicht auch Masseneinheit sein. Diese ist vielmehr im irdischen Maßsystem eine abgeleitete Einheit. Die Ableitung ergibt sich aus dem Grundgesetz, wie alsbald zu zeigen ist (131)[1]).

127. Gehen wir von den Massen als etwas Gegebenem aus, so betrifft die Erkenntnis jener Proportionalität von Gewicht und Masse eine Eigenschaft der Schwerkraft: Wir erkennen, daß die Erde alle Körper nach Maßgabe ihrer Massen (ihrer Trägheit) anzieht, insbesondere ohne jede Rücksicht auf die Art des Stoffes.

128. Es wäre das höchst verwunderlich, wenn alle die verschiedenen Atomsorten, aus welchen die verschiedenen Stoffe bestehen (18, 20), grundverschieden voneinander sein sollten. Verständlich wäre es, wenn alle Atome aus ein und demselben Urstoff aufgebaut, nur verschiedene, abgeteilte Mengen desselben wären. Daß dies der Wirklichkeit entspreche war jedoch lange unglaublich, da dann eine Verwandelung der chemischen Elemente (19) nicht unmöglich erscheinen dürfte, um deren Verwirklichung aber die „Alchimisten" z. B. in der Herstellung von Gold aus anderen Elementen lange, aber immer vergeblich sich bemüht hatten; auch hatte die Chemie ganz auf dem Gedanken der Unveränderlichkeit der Atome sich aufbauen können. Heute ist die Verwandlung der Elemente nicht mehr so fernliegend. Die Untersuchungen über Kathodenstrahlen haben das Innere der Atome erforschen gelehrt und sie haben mindestens so weit geführt, daß gemeinsame Urbestandteile in allen Atomen erkennbar wurden (E 451, 526 u. f.): die beiden Elektrizitäten. Dann ist es auch gelungen, schwere Atome in leichtere zu zerteilen. Endlich ist auch von ganz anderer Seite her ein Zeichen für die Gleichartigkeit von allem, was schwer und stets zugleich auch träge ist, erschienen: es ist, soweit zu sehen, die Energie, welcher in letzter Linie diese Doppeleigenschaft der Gravitation und der Trägheit zugehört (E 585).

129. Galilei's zweiter Satz vom freien Fall sagt: Ein fallender Körper gewinnt in gleichen Zeiten gleiche Zuwächse an Geschwindigkeit, oder — in der bereits eingeführten Ausdrucksweise (54) — die Fallbewegung ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Dies ist eine unmittelbare Folge des Grundgesetzes, sobald feststeht, daß das Gewicht des fallenden Körpers während seiner ganzen Bewegung unverändert weiter an ihm nach unten zieht und also als Kraft beschleunigend wirkt, sowie daß auch die Masse (Trägheit) des Körpers unverändert bleibt. Denn wenn Kraft und Masse ungeändert bleiben, muß nach dem Grundgesetz (Gl. 115) auch die Beschleunigung ungeändert bleiben, d. h. die Bewegung wird gleichförmig beschleunigt sein. Der Nachweis aus der Beobachtung, daß dem wirklich so ist, kommt somit einem neuen Nachweis der Gültigkeit des Grund-

---

[1]) Im absoluten Einheitssystem (192) ist umgekehrt die Masseneinheit Grundeinheit und die Krafteinheit abgeleitet.

gesetzes gleich, insofern die eben genannten Nebenannahmen keinen Anlaß zu Zweifeln geben (was genügend genau zutrifft)[1].

Galilei hat den Erfahrungsbeweis dieses zweiten Satzes nicht direkt erbracht, sondern er hat aus dem zweiten Satz den dritten abgeleitet (132) und diesen experimentell geprüft. In der Tat wären Beschleunigungsmessungen zu Galileis Zeit, da es noch keine guten Uhren oder sonstige Hilfsvorrichtungen zur Zeitmessung gab, fast aussichtslos gewesen.

130. Bemerkt sei noch, daß die Beschleunigung der freien Fallbewegung nach dem ersten Satz (119) für alle Körper gleich groß sein muß. Man bezeichnet diese irdische Schwerebeschleunigung gewöhnlich mit dem Buchstaben g[2]. Es gilt also für die besondere Kraft der Schwere nach dem Grundgesetz (Gl. 115)

$$g = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Masse}}. \qquad 130)$$

Man kann auch sagen, g ist der nach Galileis erstem Satz von der Stoffart unabhängige Proportionalitätsfaktor zwischen Gewicht und Masse. Es ist in runder Zahl $g = 10\ \mathrm{m/sek}^2$. (136)

131. Irdische Masseneinheit. — Hieraus ergibt sich auch die Umrechnung von Gewicht auf Masse bei den Massenbestimmungen mit der Waage (vgl. 124); es ist nach Gl. 130 Masse = Gewicht/g.

Man sieht daraus auch, daß hierbei als abgeleitete Einheit der Masse die Masse von g gr zugrunde liegt (d. i. mit cm als Längeneinheit rund die Masse von 1000 gr); es ist dies die Masseneinheit in dem in der Mechanik meist durchgeführten irdischen oder technischen Einheitssystem, in welchem das gr Krafteinheit ist (68)[3].

132. Galileis dritter Satz vom freien Fall sagt: Die Fallwege verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten. Er leitet diesen Satz etwa folgendermaßen aus dem zweiten Satz ab (siehe Tab. 3).

Wir betrachten Zeitaugenblicke im Abstande von je 1 Sek. während des Falles (1. Spalte der Tab.), etwa gegeben durch die Sekundenschläge einer Uhr. Zur Zeit 0 sei der Körper aus der Ruhe losgelassen. Er hat dann nach dem zweiten Satze zur Zeit 1 Sek. die Geschwindigkeit g, zur Zeit 2 Sek. die Geschwindigkeit 2 g, zur Zeit 3 Sek. die Geschwindigkeit 3 g usf., wie in der 2. Spalte der Tabelle verzeichnet. Denn wir haben mit g die allgemeingültige Fallbeschleunigung, d. i. eben den Geschwindigkeitszuwachs während jeder Sek. bezeichnet (130). Allgemein ist dann zur Zeit t die Geschwindigkeit $v = tg$ vorhanden.

Wollen wir nun die Fallwege berechnen, auf welche der dritte Satz sich bezieht, so haben wir die Geschwindigkeiten mit den Fallzeiten zu multiplizieren (Gl. 37). Dabei tritt die Schwierigkeit auf, daß die Geschwindigkeiten innerhalb

---

[1]) Die verfeinerte Kenntnis (210) zeigt, daß bei der Größe der Erdkugel das Gewicht von 1 kgr nur um etwa $^1/_3$ mgr steigt, wenn es 1 m tiefer sinkt. Die Unveränderlichkeit der Masse während einer Fallbewegung kann als strenggültig angesehen werden (E 591).

[2]) Dementsprechend ist es für naturwissenschaftliche Werke unpassend, das mit der Schwerebeschleunigung in so naher Verbindung vorkommende Gramm ebenfalls mit g zu bezeichnen.

[3]) Das andere Einheitssystem, das absolute, in welchem das gr Masseneinheit ist und zwar Grundeinheit, während umgekehrt die Krafteinheit abgeleitet wird (dyn genannt, 192), führen wir in der Elektrizitätslehre durchgreifend ein (E 262).

Tab. 3. **Fallbewegung.**

Zeit	Geschwindigkeit	Mittlere Geschwindigkeit	Gesamtweg
0	0		0
		$\frac{g}{2}$	
1	g		$\frac{g}{2}$
		$3\frac{g}{2}$	
2	2g		$4\frac{g}{2}$
		$5\frac{g}{2}$	
3	3g		$9\frac{g}{2}$
		$7\frac{g}{2}$	
4	4g		$16\frac{g}{2}$
		$9\frac{g}{2}$	
5	5g		$25\frac{g}{2}$
t	$v = tg$		$s = t^2\frac{g}{2}$

jeder Fallzeit, die wir ins Auge fassen könnten, nicht einheitlich ist, da sie fortwährend zunimmt. Wir können aber nachweisen, daß es richtig ist, mit mittleren Geschwindigkeiten während der betreffenden Fallzeit zu rechnen. Es muß das jedenfalls um so genauer richtig sein, je kürzere Zeiten wir betrachten; denn je kürzer die Zeit, desto geringer sind die in ihr vorkommenden Ungleichheiten der Geschwindigkeit. Wir betrachten zunächst einzelne Sekunden, wie in der Tabelle. Die 3. Spalte der Tabelle gibt die mittlere Geschwindigkeit innerhalb jeder Sekunde der Fallzeit an, nämlich die halbe Summe aus Anfangs- und Endgeschwindigkeit. Da hierbei die Zeit je 1 Sek. ist, so geben diese mittleren Geschwindigkeiten auch schon die während jeder dieser Sekunden zurückgelegten Wege an. (Man sieht, daß dieselben wie die ungeraden Zahlen ansteigen.)

Aus diesen Einzelwegen ergeben sich unmittelbar die Gesamtwege durch Addition. So erhält man die in der 4. Spalte der Tabelle verzeichneten, vom obersten Punkt an gerechneten, bis zu jedem einzelnen Sekundenschlag zurückgelegten Wege. Man sieht, daß diese gesamten Fallwege in der Tat wie die Quadrate der Fallzeiten ansteigen, entsprechend dem dritten Satz. Für jede beliebige Fallzeit t ergibt sich demnach der Fallweg $s = t^2 g/2$.

Hierin ist zugleich auch der Beweis der Richtigkeit der Rechnung mit mittleren Geschwindigkeiten enthalten. Denn $t\,g/2$ wäre die mittlere Geschwindig-

keit für die ganze Fallzeit t, und $t \cdot t g/2 = t^2 g/2$ der mit dieser mittleren Geschwindigkeit gerechnete ganze Fallweg. Wir sehen also, daß die Zerteilung der Gesamtzeit in einzelne Sekunden nichts anderes ergeben hat als die gleiche Rechenweise mit der ganzen Zeit, d. i. mit beliebig langer Zeit. Daraus folgt aber, daß auch eine noch weitere Zerteilung der Zeit, bei welcher die Rechnung immer noch genauer richtig werden müßte, falls sie es noch nicht war, nichts anderes ergeben würde. Die Rechnung war somit überhaupt schon richtig.

133. Es sei hierbei bemerkt, daß solches Fortschreiten zu immer feinerer Zerteilung von Zeiten, auch Räumen, solange bis das Fortschreiten keine merkliche Änderung im Ergebnis mehr hervorbringt (was im allgemeinen bis zu unendlich feiner Zerteilung führt), der allgemeine Weg ist, auf welchem die von Newton begründete, von Leibniz in feste Regeln gebrachte Infinitesimalrechnung auch in Fällen zum Ziele kommt, wo die Rechnung mit gröber geteilten Zeiten oder Räumen ungenau wäre (vgl. 39, 48 und 54).

134. Dieselbe Rechnung, wie in Tab. 3, gilt auch für jede andere gleichförmig beschleunigte Bewegung. Hat die Beschleunigung die ganz beliebige Größe b, so gilt

für die Geschwindigkeit zur Zeit t $\qquad v = bt \qquad$ 134a)

und für den Weg $\qquad s = bt^2/2, \qquad$ 134b)

wobei, wie die Gleichungen selbst zeigen, sowohl v als s von $t = 0$ an gerechnet sind ($t = 0$ ergibt $v = 0$ und $s = 0$).

135. Für die Richtigkeit des dritten Satzes hat Galilei den Beweis aus der Erfahrung geliefert, womit aber rückwärts auch der zweite Satz und damit von neuem das Grundgesetz mit der Wirklichkeit verglichen ist.

Die Beobachtungen wurden indessen nicht an frei fallenden Körpern angestellt, sondern an einer auf schiefer Ebene hinabrollenden Kugel. Diese Fallbewegung auf der schiefen Ebene muß von ganz derselben Art sein, wie beim freien Fall, nur mit verringerter Beschleunigung, entsprechend der auf der schiefen Ebene nach Maßgabe von deren Übersetzungsverhältnis verringerten Kraft (82). Dadurch wurde die damals schwierige Messung sehr kurzer Zeiten, sowie die Gefahr zu großen Einflusses des Luftwiderstandes bei den großen Geschwindigkeiten des freien Falles umgangen. Galileis „Fallrinne" war über 6 m lang; sie wurde in zwei verschiedenen Neigungen benutzt. Eine große Zahl verschiedener Fallwege und Zeiten wurde gemessen und mit aller erreichbaren Genauigkeit in Übereinstimmung mit dem dritten Satze gefunden. Zur Zeitmessung stellte Galilei einen Eimer Wasser auf, in dessen Boden ein kleines Loch war, durch das ein feiner Wasserstrahl austrat. Der Strahl wurde während jeder zu messenden Zeit in einen kleinen Becher aufgefangen; die Gewichtszunahme des Bechers ergab das Maß der Zeit[1]).

[1]) Hat man auf der schiefen Ebene Fallzeiten und Wege in sek und m gemessen, so kann man mittels Gl. 134b auch die Beschleunigung auf der schiefen Ebene in m/sek² berechnen. Dieselbe, vervielfältigt nach Maßgabe des Übersetzungsverhältnisses der benutzten schiefen Ebene gäbe dann die Beschleunigung g des freien Falles. Man findet in dieser Weise g ein wenig zu klein gegenüber Messungen am freien Fall (136). Die Ursache hiervon ist die Drehbewegung, welche die Kugel beim Rollen auf der schiefen Ebene annimmt, während sie bei freiem Fall nur die fortschreitende Bewegung hat. Das Hinzutreten der Drehbewegung kann durch Rechnung berücksichtigt werden; es hat die Wirkung einer Massenvermehrung der Kugel nach Maßgabe von deren Trägheitsmoment (181). Es ist dies ein Beispiel gleichzeitigen Stattfindens von fortschreitender und drehender Bewegung, welche beide stets gesondert berechnet und in ihren Wirkungen addiert werden können (178).

136. Nach Galileis Studien erschien zum erstenmal die Bewegung herabfallender Körper nicht mehr nur als Übergang von einer anfänglichen, oberen Gleichgewichtslage zu einer schließlichen unteren, ein Übergang an dem keine Einzelheiten zu erkennen und zu verstehen wären, wie es in den langen Jahrhunderten des Stillstandes der Naturforschung seit dem Anfang unserer Zeitrechnung schien. Sondern wir sehen jetzt die Fallbewegung in ihre Einzelheiten zerlegt und diese auch verstanden als Folgen der der Trägheit proportionalen Schwerkraft (122) und des einen Grundgesetzes (115). Als beschleunigte Bewegung hatte sie auf Grund von Fallversuchen schon Leonardo erkannt (etwa um 1490); jetzt sehen wir sie — nach Absonderung des besonders zu untersuchenden Einflusses der Luft — als gleichförmig beschleunigte Bewegung mit wohlfestgesetztem Begriff der Beschleunigung, und die für alle Körper gültige Größe der Beschleunigung g (130) kann leicht aus einer einzigen Zeit- und Wegmessung hergeleitet werden. Man findet, daß ein aus der Ruhe losgelassener Körper innerhalb der ersten Sekunde rund 5 m Fallweg zurücklegt; hieraus ergibt sich (132) in runder Zahl $g = 10$ m/sek².

Wollen wir die Fallbewegung in einfacher Weise abbilden, so teilen wir den senkrechten Fallweg in lauter gleiche Strecken von der Länge 5 m, wie es Abb. 27 in gehörig verkleinertem Maßstabe zeigt. Der vom Punkte 0 zur Zeit Null von der Ruhe aus losgelassene Körper wird dann zu den Zeiten 1, 2, ... Sek. die mit den gleichen Zahlen bezeichneten Punkte durchlaufen (vgl. 132 und die Tab. 3). Auch die Geschwindigkeiten sind für jeden Punkt des Fallweges angebbar (132 oder Gl. 134a mit $b = g$).

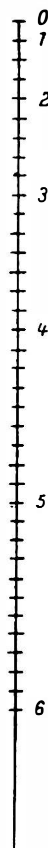


Abb. 27. Freier Fall.

137. Auch die Vorstellung von „Kraft" erscheint durch Galilei erweitert; erst durch seine Studien hat sie die allgemeine Bedeutung erlangt, mit welcher wir sie von vornherein eingeführt haben (62). Vorher war „Kraft" nur als ruhender Druck erfaßt worden, und dies genügte zur Entwickelung der Statik. Galilei läßt die Kraft, im besonderen die Schwerkraft, auch dann unverändert weiter wirken, wenn dem ruhenden Körper die Unterlage entzogen ist. Die Kraft zieht noch immer weiter an ihm, und die Folge davon ist die Beschleunigung nach Maßgabe des Grundgesetzes. Im Ruhezustand ist die Wirkung der Kraft die Deckung einer ihr gleichen, entgegengesetzt gerichteten (meist elastischen) Kraft (73); man hat dann den von der Kraft ausgeübten Druck. Fehlt eine entgegengesetzte Kraft, die Gleichgewicht schaffte, so ist die Wirkung der Kraft Beschleunigung nach dem Grundgesetz.

138. Beide volle Wirkungen — Druck und Beschleunigung — kann eine Kraft nicht gleichzeitig haben. Tritt die volle Beschleunigung ein, so muß der Druck fehlen. So drücken bei der früher betrachteten frei fallenden Flasche (120) die Gegenstände in ihr nicht auf ihren Boden, sondern sie schweben nur auf demselben; überhaupt fehlen bei Körpern, die frei fallen, alle in der Ruhe vorhandenen Schwerewirkungen (vgl. z. B. auch die fallenden Tropfen 319). Schon Galilei hat einen Versuch ausgeführt, der dies zeigt. Es waren zwei Eimer senkrecht übereinander an einer Waage aufgehängt und durch ein Gegengewicht am anderen Ende des Waagebalkens im Gleichgewicht gehalten. Der

obere Eimer war mit Wasser gefüllt, der untere leer. Wurde nun ein Loch im Boden des oberen Eimers geöffnet, so daß das Wasser als Strahl in den unteren Eimer abfloß, so hob sich die Seite der Waage mit den Eimern; sie ist erleichtert um das Gewicht des im Strahl befindlichen Wassers, weil dieses die volle Schwerebeschleunigung hat und also nicht mitdrückt.

139. Nächst dem freien Fall hat Galilei auch die Wurfbewegung untersucht, d. i. die Fallbewegung mit vorgegebener Anfangsgeschwindigkeit im luftfreien Raum. Wir können uns nach dem bereits Behandelten hierüber kurz fassen.

Der Wurf senkrecht nach unten ergibt nichts Neues. Er ist wieder nur dieselbe Bewegung, wie beim freien Fall, nur fehlt ein oberstes Stück der Bahn. Man betrachte die freie Fallbewegung, Abb. 27. Der vom Punkt 0 an mit der Anfangsgeschwindigkeit Null beginnende Körper hat etwa im Punkt 4, nach 4 sek. (im allgemeinen t sek) Fallzeit, eine gewisse Geschwindigkeit $v = gt$ erreicht, mit der er dann die Fallbewegung fortsetzt. Da es aber gleichgültig ist, woher er diese senkrecht nach unten gerichtete Geschwindigkeit v hat, so muß er, mit dieser Geschwindigkeit v irgendwie sonst — etwa aus werfender Hand — im Punkt 4 losgelassen, dann weiter genau dieselbe Bewegung ausführen, welche in Abb. 27 von diesem Punkt nach unten bereits für den freien Fall dargestellt ist. Es ist danach auch für den Wurf senkrecht nach unten Ort und Geschwindigkeit des Körpers für jede beliebige Zeit mittels den schon gewonnenen Gl. 134 vorausberechenbar.

140. Der Wurf senkrecht nach oben bietet im aufsteigenden Teil der Bahn Neues. Um dies zu übersehen, wenden wir den Satz von der gegenseitigen Nichtstörung von Geschwindigkeiten an, die aus verschiedener Ursache gleichzeitig vorhanden sind (44). Es würde der zur Zeit 0 mit der senkrecht nach oben gerichteten Geschwindigkeit v_0 losgelassene Körper ohne die Mitwirkung der Schwerkraft zu den Zeiten 1, 2 .... t sek (Zeile 1 der Tab. 4) immerfort bei

Tab. 4. **Wurfbewegung senkrecht nach oben.**

Zeit	0	1	2	3	4	5 .... t
Anfangsgeschw. Fallgeschwindigk.	v_0 0	v_0 $-g$	v_0 $-2g$	v_0 $-3g$	v_0 $-4g$	v_0 .... v_0 $-5g$ .... $-tg$
Gesamtgeschw.	v_0	$v_0 - g$	$v_0 - 2g$	$v_0 - 3g$	$v_0 - 4g$	$v_0 - 5g \dots v_0 - tg$
Beispiel	$20\frac{m}{sek}$	$10\frac{m}{sek}$	0	$-10\frac{m}{sek}$	$-20\frac{m}{sek}$	$-30\frac{m}{sek}\dots$

dieser Geschwindigkeit v_0 bleiben (Zeile 2). Durch Wirkung der Schwerkraft allein würde er zu denselben Zeiten die in der 3. Zeile der Tabelle verzeichneten Geschwindigkeiten annehmen; dieselben haben negatives Zeichen, weil wir die nach oben gerichtete Geschwindigkeit v_0 positiv genommen haben. Als wirkliche Geschwindigkeit ergibt sich jeweils die Summe der beiden Einzelgeschwindigkeiten, Zeile 4. Man erkennt, wegen des steten Steigens des negativen Summanden, daß ein Augenblick mit der Geschwindigkeit Null eintreten muß, wenn nämlich $gt = v_0$ geworden ist. Bis dahin war die Geschwindigkeit positiv, d. i. nach oben gerichtet, von da ab wird sie negativ, d. i. nach unten gerichtet. Der

geworfene Körper steigt daher auf, erreicht einen höchsten Punkt seiner Bahn, kommt dort einen Augenblick zur Ruhe und fällt dann herab. Das Herabfallen von der Ruhe aus muß genau die schon betrachtete Bewegung des freien Falles sein; denn es ist einerlei, aus welcher Ursache der Körper zur Ruhe gekommen war. Im aufsteigenden Teil der Bewegung durchläuft der Körper von Sekunde zu Sekunde dieselben Geschwindigkeiten zwischen v_0 und Null, die auch im absteigenden Teil, d. i. bei freiem Fall vorkommen, nur in verkehrter Reihenfolge. (Siehe den Beispielsfall in Zeile 5, mit $v_0 = 20$ m/sek und $g = 10$ m/sek^2). Die aufsteigende Bewegung eines senkrecht nach oben geworfenen Körpers ist also die genaue Umkehrung der freien Fallbewegung. Der Körper wird demnach, wieder zu seinem Ausgangspunkt herabkommend, dieselbe Geschwindigkeit haben, nur in der verkehrten Richtung, mit der er hinaufgeworfen war, und er wird ebenso lange steigen als er zu diesem Punkte wieder herabfällt. Die Steighöhe wird gleich der zur Geschwindigkeit v_0 gehörigen Fallhöhe sein. Hiermit ist alles Fragliche im gegebenen Falle solchen Wurfs auch in Zahlen berechenbar.

141. Zur Betrachtung des beliebig schiefen Wurfes bedienen wir uns der Erkenntnis der ungestörten Gleichzeitigkeit der Wege, die somit geometrisch zu addieren sind (45). Es seien (Abb. 28) 0, 1, 2, 3, ... die Punkte, welche der unter dem Winkel α schief nach oben geworfene Körper zu den Seiten 0, 1, 2, 3, ... sek. bei alleiniger Wirkung seiner Anfangsgeschwindigkeit v_0 durchlaufen würde. Sein Weg 0 a zu beliebiger Zeit t wäre infolge dieser gleichförmigen Bewegung $\overline{0a} = v_0 t$. An jeden dieser Wege 01, 02 usw. stückeln wir mit Größe und Richtung den gleichzeitigen Fallweg $ab = gt^2/2$ (Abb. 27), wobei hier der für v_0 benutzte Maßstab gelten muß. Die durch alle so erhaltenen Punkte b gezogene Linie wird die Wurfbahn sein. Man sieht, daß sie die von jedem

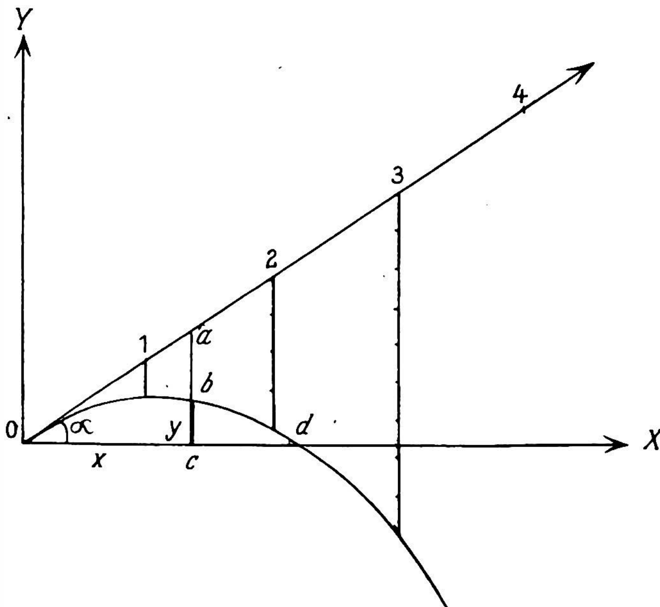


Abb. 28. Wurf.

Wasserstrahl her (den man als ununterbrochene Folge geworfener Tropfen betrachten kann) bekannte Parabelform hat.

Will man die Gleichung der Wurfbahn, so hat man für die in horizontaler Richtung gemessenen Abszissen

$$x = \overline{0c} = v_0 t \cos \alpha$$

und für die Ordinaten

$$y = \overline{cb} = \overline{ca} - \overline{ba} = v_0 t \sin \alpha - gt^2/2,$$

aus welchen beiden Gleichungen die Zeit t zu eliminieren wäre, um eine Gleichung zu erhalten, die nur das Räumliche, von der Zeit Unabhängige zum Ausdruck bringt: die Bahngleichung. Man sieht, daß dabei eine Gleichung zweiten Grades zwischen x und y sich ergäbe, daß somit die Bahn ein Kegelschnitt sein muß. Man könnte die Gleichung nach den Regeln von Des Cartes' analytischer Geometrie untersuchen und so finden, daß sie nicht Kreis und Ellipse, noch Hyperbel, sondern eine Parabel darstellt. Jedoch, Kreis und Ellipse sind schon dadurch ausgeschlossen, daß die Bahnlinie niemals in sich zurückkehren wird, weil die Bewegung in Richtung von v_0 stets bestehen bleibt, und die Hyperbel ist ausgeschlossen, weil die Bahn keiner festen geraden Linie (Asymptote) sich nähern kann, indem sie immer nur zunehmend nach unten sich biegen muß ohne doch, wegen v_0, das horizontale Fortschreiten zu verlieren.

Die Achse der Parabel steht stets senkrecht. Bei $\alpha = 90^0$ klappt die Parabel in die gerade Bahn des Wurfes senkrecht nach oben zusammen; man hat dann die größte Wurfhöhe bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit. Die Wurfweite (0d in Abb. 28) wird bei $\alpha = 45^0$ am größten; sie beträgt dann das doppelte der größten Wurfhöhe, was alles aus der Bahngleichung nach Rechenregeln gefunden werden kann.

Das Zutreffen der parabolischen Form der Bahn sowie der erwähnten Folgerungen bestätigt die Geltung des Grundgesetzes sowie der unabhängigen Übereinanderlagerung der Einzelbewegungen.

Diese Übereinanderlagerung wird gut anschaulich gemacht durch einen senkrechten Wurf in fahrendem Eisenbahnzug. Ein nicht mitfahrender Beobachter sieht dann als Wurfbahn die Parabel als Ergebnis des gleichzeitigen Vorhandenseins der senkrechten Wurfbewegung und der horizontalen gleichförmigen Bewegung des Eisenbahnzuges. Dabei kann die senkrechte Wurfbewegung als Erfolg der senkrechten Komponente der schiefen Anfangsgeschwindigkeit der Abb. 28 angesehen werden, während die horizontale Komponente dem Eisenbahnzug angehört.

Energiegesetz.

142. Wir wenden uns jetzt einer Betrachtungsweise zu, die aus wesentlich neuerer Zeit stammt, wenn auch ihre Anfänge ebenfalls schon bei Galilei sich finden. Die Betrachtungsweise geht vom Begriff der Arbeit aus (89); sie führt zu Robert Mayers Energiegesetz (1842 und 1845).

Wir haben Arbeit bisher nur an den Maschinen betrachtet, wobei stets nahe Gleichgewicht vorausgesetzt war; jetzt kommt es darauf an, die Bedeutung der Arbeit auch bei Bewegungsvorgängen, ja schließlich bei allen Naturvorgängen überhaupt zu verfolgen.

Wir können hierbei vorteilhaft zunächst an eine altbekannte Vorrichtung, die Ramme, uns wenden. Es wird in derselben ein genügend schweres Gewicht, der Rammklotz, zunächst mittels irgendwelcher Maschinen — z. B. Flaschenzug und Rad an der Welle — genügend hoch gehoben und dann frei auf das obere Ende des einzurammenden Pfahles fallen gelassen, wobei es denselben jedesmal um ein Stück weiter ins Erdreich treibt, was der Zweck der Vorrichtung ist. Wir wissen bereits, daß die Art der Maschine, welche zum Heben des Klotzes benutzt wird, für die Größe der dabei zu leistenden Arbeit gleichgültig ist; denn keine Maschine ändert etwas an der Größe der Arbeit (90, 98). Wird das Ge-

wicht P kgr um h Meter gehoben, so ist dazu in jedem Falle P · h mkgr Arbeit zu leisten.

Diese bei Hebung des Klotzes an ihm geleistete Arbeit dient zum Einrammen des Pfahles sobald der Klotz fallen gelassen wird. Es ist aber bemerkenswert, daß die Verwendung dieser Arbeit nicht sogleich erfolgen muß, sondern daß das auch zu beliebig späterer Zeit geschehen kann, wenn nur der Klotz solange oben bleibt. Mit einem gehobenen Gewicht hat man überhaupt stets Arbeit verfügbar; man kann mit ihm beliebige Maschinen treiben, so wie das aufgezogene Uhrgewicht die Uhr treibt.

143. Energie. — Wir gelangen so zur Vorstellung von *aufgespeicherter Arbeit*, von einem *Arbeitsvorrat*, vorhanden im gehobenen Gewicht und in demselben bleibend, solange es oben ist. Man benutzt für solche vorrätige, irgendwo in irgendwelcher Weise aufgespeicherte Arbeit vorzugsweise den Namen *Energie*. Wir sagen daher: Ein gehobenes Gewicht hat stets einen gewissen *Energieinhalt*. Seiner Größe nach ist derselbe durch Gewicht mal Hubhöhe angebbar; denn dies ist die beim Heben aufgewendete Arbeit, und sie kann beim Wiederherabsinken in unveränderter Größe wiedererhalten werden, indem z. B. das herabsinkende Gewicht mittels einer Rolle ein gleich großes um die gleiche Höhe hebt.

Ganz ebenso findet man auch in einer gespannten Feder Arbeitsaufspeicherung, Energieinhalt, z. B. im gespannten Bogen einer Armbrust oder in der Feder einer aufgezogenen Taschenuhr. Die aufgespeicherte Arbeit kann vom Bogen jederzeit an den Pfeil zu dessen Fortschleuderung abgegeben werden; von der Feder der Taschenuhr wird sie einen ganzen Tag über in kleinen Teilen zur Überwindung der Reibungswiderstände hergegeben. Auch hier kann die Menge der aufgespeicherten Arbeit, die Größe des Energievorrates, stets berechnet werden als das Produkt aus der zum Spannen der Feder nötig gewesenen Kraft und dem dabei in Richtung der Kraft beschriebenen Weg.

144. Potentielle Energie. — Diese Energieaufspeicherungen, von welchen das gehobene Gewicht und die gespannte Feder Beispiele sind und die das Gemeinsame haben, immer in unmittelbar ersichtlicher Weise durch das Produkt aus Kraft und Weg bemessen zu sein, haben den Namen „*potentielle Energie*“ erhalten, oder auch — weil ihr Vorhandensein *an* gewisse Lagen der betreffenden Körperteile geknüpft ist — „*Energie der Lage*“ oder manchmal „*Spannkraft*“.

145. Kinetische Energie. — Es gibt aber auch noch *andere Arten von Energieaufspeicherung*, andere *Energieformen*.

Eine zweite Energieform, nächst der potentiellen Energie, lernen wir wieder an der Ramme erkennen. Es fällt in dieser der gehobene Klotz auf den Pfahl und schlägt ihn dadurch ein. Die letztere Wirkung zeigt, daß der durch das Heben in den Klotz gebrachte Arbeitsvorrat doch noch nicht verschwunden ist, wenn der Klotz unten am Pfahl ankommt, obgleich potentielle Energie dann ebensowenig mehr in ihm ist als in einer entspannten Feder. Der Arbeitsvorrat ist aus dem Klotz offenbar erst dann verschwunden (an den Pfahl abgegeben), wenn der Klotz auf dem Pfahl zur Ruhe gekommen ist. Der Arbeitsvorrat des schon unten angekommenen Klotzes, kurz vor seinem Aufschlagen, liegt offenbar in der dann vorhandenen *Geschwindigkeit* des Klotzes *zusammen* mit seiner

Eigenschaft der Trägheit. Ohne Geschwindigkeit auf dem Pfahl liegend wirkt der Klotz nicht; er wirkt also überhaupt nicht durch sein Gewicht. Wohl aber wirkt er in der Ramme durch seine Trägheit, seine Masse, zusammen mit seiner Geschwindigkeit.

So kommen wir zur Einsicht, daß jede Masse, die in Bewegung ist, eben vermöge ihrer Bewegung Energieinhalt besitzt. Die Größe des Energieinhalts kann nur von der Größe der Masse und der Größe der Geschwindigkeit abhängen; etwas Drittes ist nicht ersichtlich als mitwirkend, und es muß auch gleichgültig sein, in welcher Weise die betreffende Masse ihre Geschwindigkeit erhalten hat; Dies bestätigt sich alles, und wir werden sogleich zeigen, wie die Energiemenge. aus Masse und Geschwindigkeit berechenbar ist.

Die mannigfachsten Beispiele für den Energieinhalt bewegter Massen sind alltäglich: Jede bewegte Masse — ein Geschoß, ein Eisenbahnzug in Fahrt — kann Arbeit leisten; sie kann etwas zertrümmern, kann einen Körper einer Kraft entgegen fortbewegen, kann einen Körper in die Höhe schleudern, kann — wenn die Geschwindigkeit der Masse nach oben gerichtet ist — sich selbst heben.

Man sieht, daß der Arbeitsvorrat der bewegten Masse in ganz anderer Form erscheint als die vorher betrachtete potentielle Energie; er hat daher auch einen besonderen Namen erhalten: „kinetische Energie" oder auch „Energie der Bewegung" oder manchmal „lebendige Kraft". Der Sinn ist immer: Infolge von Bewegung vorhandene Energie.

146. Berechnung kinetischer Energie. — Um die in einer Masse m bei der Geschwindigkeit v enthaltene kinetische Energie in Meterkilogrammen aus m und v berechnen zu können, hat man nur zu bedenken, daß eine beliebige Kraft K längs des in Kraftrichtung liegenden Weges s (Abb. 29) auf die Masse m wirkend, an ihr jedenfalls die Arbeit K · s leistet, wobei die Masse von der Geschwindigkeit Null auf die Geschwindigkeit v gebracht wird, und daß dann auch nur diese geleistete Arbeit K · s in der Masse aufgespeichert sein kann, wie beim gehobenen Gewicht. Es kommt danach nur darauf an, Galileis und Newtons Grundgesetz (115) auf den Beschleunigungsvorgang längs des Weges s anzuwenden, um den gewünschten Zusammenhang der Arbeit mit m und v ersehen zu können. Diese Berechnung verläuft wie folgt:

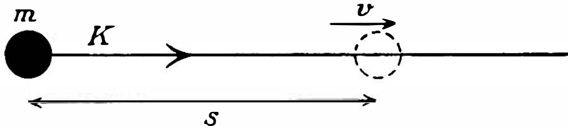


Abb. 29. Arbeit gegen Trägheit.

Die Bewegung der Masse m längs des Weges s wird nach dem Grundgesetz mit der Beschleunigung b = K/m vor sich gehen. Da K und m unverändert bleiben[1]), wird auch b konstant sein; die Bewegung wird also gleich-

[1]) Es ist hier kein Anlaß, die Masse während der Beschleunigung als veränderlich anzusehen. Daß Änderung einer Masse bei Beschleunigung tatsächlich eintreten und merklich werden kann, dies zeigt sich bei einem in der Elektrizitätslehre zu betrachtenden Fall des Auftretens außerordentlich großer Geschwindigkeiten (E 479). Wir werden dann dieselbe kleine Rechnung, die hier oben ausgeführt wird, mit Berücksichtigung der Massenänderung erneut durchführen (E 480), wobei sich ergibt, daß der hier für die kinetische Energie berechnete Ausdruck $mv^2/2$ allgemeine Gültigkeit nur für kleine (gegen Lichtgeschwindigkeit verschwindende) Geschwindigkeiten behält. Vgl. E 481 und die verfeinerte Betrachtung der kinetischen Energie, E 589.

förmig beschleunigt sein. Für diese Bewegungsart gilt $s = bt^2/2$ und $v = bt$ (134), wenn t die zur Zurücklegung von s erforderliche Zeit ist. Aus den letzten zwei Gleichungen folgt $s = v^2/2b$, also die Arbeit $K \cdot s = Kv^2/2b$. Setzt man $b = K/m$ ein, so ergibt sich der gesuchte Zusammenhang für die als kinetische Energie aufgespeicherte Arbeit:

$$Ks = \frac{mv^2}{2}. \tag{146}$$

Man sieht, daß es tatsächlich, wie erwartet, nur auf Masse und Geschwindigkeit ankommt, wobei aber letztere in zweiter Potenz maßgebend ist.

147. Arbeit von Kräften gegen andere Kräfte und gegen Trägheit. — Es ist bemerkenswert, daß wir hier einen Fall des Arbeitens einer Kraft gegen Trägheit betrachtet haben, während wir in der Statik die Kräfte nur gegen andere Kräfte arbeiten ließen. In diesem letzteren Falle, bei den Maschinen, befanden wir uns stets so nahe dem Gleichgewicht, daß keine merkliche resultierende Kraft übrig blieb, weshalb (nach dem Grundgesetz) auch keine merkliche Beschleunigung eintreten konnte. Die damals zu betrachtenden Bewegungen waren daher nur gleichförmig, und sie konnten auch beliebig langsam sein. Deshalb trat dabei das Arbeiten gegen Trägheit gar nicht auf, und es wurde auch keine kinetische Energie gesammelt.

Wir können mit den eingeführten Namen nun sagen: Das Ergebnis des Arbeitens einer Kraft gegen eine andere Kraft ist stets potentielle Energie, z. B. wenn Muskelkraft gegen die Schwere oder gegen elastische Kräfte arbeitet; das Ergebnis des Arbeitens einer Kraft gegen Trägheit ist dagegen stets kinetische Energie, z. B. wenn Muskelkraft einen Stein fortschleudert.

148. Energieverwandlung. — Nun ist etwas weiteres zu bemerken, was wir an den eben betrachteten beiden Energieformen feststellen können und was auch wieder an der Ramme ersichtlich wird: Die verschiedenen Energieformen können sich ineinander verwandeln. Ist der Rammklotz oben, so hat er die potentielle Energie, welche seinem Gehobensein entspricht; unten, kurz vor dem Aufschlagen hat er diese potentielle Energie gänzlich verloren, aber er hat dafür kinetische Energie: Die potentielle Energie hat sich während des Herabfallens in kinetische verwandelt. Diese Verwandlung geschieht auf dem Fallwege ganz allmählich: Mit der abnehmenden Höhenlage des Klotzes sinkt seine potentielle Energie, gleichzeitig steigt aber seine Geschwindigkeit und damit seine kinetische Energie.

149. Solche Verwandlungen von potentieller Energie in kinetische und auch umgekehrt kommen sehr häufig vor. Eines der vielen Beispiele ist das Pendel, etwa eine an einem Faden aufgehängte Kugel. Schwingt die bei n (Abb. 30) aufgehängte Kugel auf der Kreisbahn a c b hin und her, so findet eine fortwährende Verwandlung und Rückverwandlung der beiden Energieformen statt. In a hat die Kugel die volle, vor dem Loslassen ihr mitgeteilte, der Hubhöhe c d entsprechende potentielle Energie, ebenso auch in b; kinetische Energie hat sie an diesen beiden Punkten nicht, weil es Umkehrpunkte sind, an welchen die Kugel jedesmal einen Augenblick ruht. In c dagegen ist diese ganze potentielle Energie jedesmal in kinetische Energie verwandelt; die Kugel passiert diesen Punkt mit der höchsten, während der Schwingungen überhaupt vorkommenden

Geschwindigkeit. Es findet also auf jedem einzelnen Schwingungswege a b oder b a eine doppelte Energieverwandlung statt, und die ganze Pendelbewegung besteht in fortdauernder Energieumwandlung. Durchschnittlich über die ganze Dauer einer Schwingung ist die Hälfte der Gesamtenergie potentiell, die andere Hälfte kinetisch.

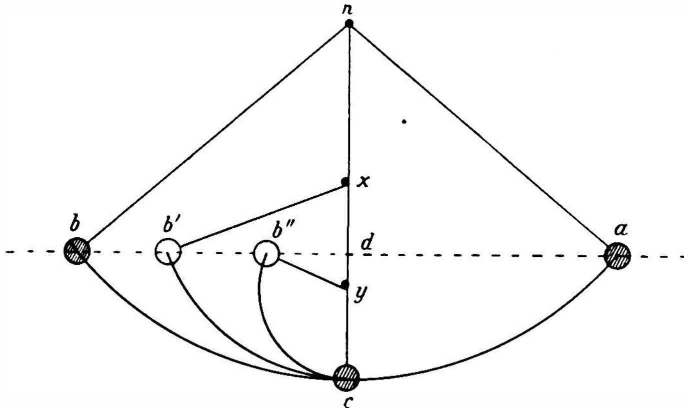


Abb. 30. Galilei's Energie-Versuch.

150. Auslösung. — Oft wird die Verwandlung von Energie durch besondere „Auslösung" eingeleitet. Es kann dann eine ursprünglich gegebene Energieform unverändert aufgespeichert bleiben bis zum Bedarfsfall der Verwandlung. So ist beispielsweise im gespannten Bogen der Armbrust die potentielle Energie solange aufbewahrbar bis der Auslösungsvorgang des Losschießens die Verwandlung in die kinetische Energie des Pfeiles veranlaßt. Auch bei der Ramme findet gewöhnlich Auslösung statt, indem der Kloß bei Erreichung seines Höchststandes durch Betätigung eines Hakens oder sonstwie selbsttätig von der Hebemaschine abgetrennt wird. Auslösung ist stets ein Vorgang, der selbst keine oder keine wesentliche Energiezufuhr bedeutet, sondern der nur die Verwandlung schon vorhandener Energie einleitet.

151. Eine Frage von großer Bedeutung ist es, ob bei Verwandlung von Energie eine Vermehrung oder Verminderung der Energiemenge stattfinden kann, ja wie es überhaupt bei allen Naturvorgängen mit Vermehrung oder Verminderung von Energie stehe. Wir kommen da auf Gedanken, die schon von Galilei angesponnen sind, die aber erst mehr als 200 Jahre später bei Rob. Mayer zur vollen Durchführung kamen.

152. Perpetuum mobile. — Fragen wir zuerst nach der Möglichkeit einer Vermehrung der Energie. Dieselbe würde bedeuten, daß Arbeitsleistung ohne Arbeitsaufwand möglich ist, daß man eine Arbeitsaufspeicherung erhalten oder vermehren kann ohne irgendwoher Arbeit zugeführt zu haben. Daß die Maschinen, die wir bereits betrachtet haben, dies nicht leisten, sahen wir schon; denn die Größe der Arbeit blieb bei ihnen stets unveränderlich (90, 98). Jedoch: wie vielerlei andere Vorrichtungen sind noch denkbar! Und wenn auch nur eine derselben eine Vermehrung von Energie bewirken könnte, so wäre das von außerordentlicher praktischer Wichtigkeit. Denn die Vorrichtung würde fort-

dauernd die in ihr vermehrte Energie ohne Ersatz abgeben können; sie würde als immerfort von selber weiterarbeitender Motor, als das schon bei früherer Gelegenheit (83) betrachtete „Perpetuum mobile" wirken können. Man hat um des erhofften Vorteils willen immer und immer wieder mit größtem Eifer und unter Hinzuziehung aller bekannt gewordenen Naturvorgänge die Verwirklichung einer solchen Vorrichtung erstrebt. Es blieb aber aller Erfolg aus. Eben die Fülle der vergeblichen Bemühungen und aller damit verbundenen Naturbeobachtung verbürgte es mit stets zunehmender Sicherheit, daß das Perpetuum mobile unmöglich ist. Dies bedeutete für Rob. Mayer, daß Vermehrung der Energie von selber (d. h. ohne Zufuhr von Energie) niemals eintritt.

Heute ist die Unmöglichkeit des Perpetuum mobile schon sehr vielfältig mit anderen Naturkenntnissen allgemeiner Art in feste Verknüpfung gebracht (s. z. B. W 112), so daß nichts sicherer steht als diese Unmöglichkeit und alles was mit ihr in Zusammenhang ist. Es ist nicht zu bezweifeln, daß diese Unmöglichkeit durch die gesamte Natureinrichtung bedingt ist.

153. Ein früher, sehr einfacher Versuch, den Galilei ausführte und der auch schon Energievermehrung auf die Probe stellt, sei hier erwähnt: Galilei ließ bei Versuchen mit einem Pendel dasselbe an einem Nagel x (Abb. 30) vorbeischwingen, den er in die Wand geschlagen hatte, an welcher das Pendel hing. Schwingt das Pendel, von a kommend, mit seinem Faden an x vorbei, so wird derselbe geknickt, und die Kugel beschreibt den Weg a c b′. Das Wesentliche ist, daß dabei die Kugel ebensowenig über die Höhenlage a b, von welcher sie gekommen ist, hinauskommt, wie ohne den Nagel; denn b′ und b liegen auf einer Horizontalen, und die Kugel kehrt bei b′ (oder schon weiter unten) wieder um. Dasselbe ist der Fall, wenn der Nagel bei y eingeschlagen ist, wobei die Bahn a c b″ sich ergibt, oder wenn er irgend sonstwo angebracht ist. Niemals gelingt es durch derlei Kunstgriffe, die keine Energiezufuhr bedeuten, eine über a b hinausgehende Höhenlage der Kugel zu erreichen; niemals also ergibt sich Vermehrung der Energie, die der Kugel beim Loslassen von a ursprünglich durch die Hebung von c bis a mitgeteilt wurde.

154. Nun betrachten wir die gegenteilige Frage, nämlich die der Verminderung von Energie.

Die Antwort scheint hier zunächst aus alltäglicher Beobachtung dahin zu gehen, daß selbsttätige Verminderung der Energie die Regel sei. Man betrachte z. B. Galileis soeben beschriebenes Pendel (153, Abb. 30). Ob es ohne oder mit Zuhilfenahme des Nagels x oder y schwingt: jedesmal findet man, daß alsbald seine Umkehrpunkte tiefer und tiefer unter die Ausgangshöhe a b sinken, und dies bedeutet fortdauernden Verlust von potentieller Energie, ohne daß dafür ein Zuwachs von kinetischer Energie aufgetreten wäre. Zuletzt kommt das Pendel sogar ganz zur Ruhe, so daß alle ihm anfangs, beim Heben bis a mitgeteilte Energie verschwunden ist.

155. Wärme als Energieform. — Die Betrachtung derartiger Vorgänge in der seinerzeit üblichen Weise befriedigte Rob. Mayer keineswegs. Wohl gab man als Ursache der Schwingungsweiten-Abnahme des Pendels richtig das Mitwirken der Kräfte der Reibung an, so wie auch für das Zurruhekommen einer auf horizontaler Unterlage rollenden Kugel. Es blieb aber die Frage nach der

verlustig gegangenen Arbeit unbeantwortet. Rob. Mayer beantwortete sie in höchst umfassender Weise, indem er sie vor allem in Verbindung brachte mit der anderen Frage: Was ist Wärme?, die schon ein Lebensalter früher Graf Rumford und Davy beschäftigt hatte, ohne noch eingehend beantwortet zu sein (W 68). Rob. Mayer sah, daß Reibung und unelastischer Stoß stets Wärme zum Vorschein kommen lassen, ohne daß solche irgendwo fehlt, während eben dieselben beiden Vorgänge auch die einzigen sind, die kinetische Energie verschwinden machen, ohne daß dafür potentielle Energie erscheint. So und aus noch anderen Überlegungen kam Rob. Mayer dazu, Wärme ebenfalls als eine Energieform anzusehen. Die Wärmeerzeugung bei Reibung und unelastischem Stoß wäre dann Verwandlung von kinetischer Energie in Wärme, und der Verlust der kinetischen Energie wäre erklärt: dieser Energieverlust ist nur scheinbar; die Energie ist erhalten geblieben; sie hat nur jene dritte Form — der Wärme — angenommen.

Es zeigte sich, daß diese Erklärung quantitativ einwandfrei durchführbar ist, indem ein bestimmtes „mechanisches Wärmeäquivalent" angenommen werden kann, das für Verwandlung von potentieller und kinetischer Energie in Wärme und umgekehrt gilt. Dieses ebenfalls schon von Rob. Mayer eingeführte Äquivalent setzt (nach heutiger, verfeinerter Kenntnis) 1 Kalorie Wärme gleich 427 mkgr potentieller oder kinetischer Energie (W 72—75). Nach diesem Äquivalent richtet sich die Wärmeentwickelung bei verschwindender mechanischer Arbeit. Für die umgekehrte Verwandlung, von Wärme in potentielle oder kinetische Energie, war die zu Rob. Mayers Zeit schon ziemlich verbreitete Dampfmaschine ein Beispiel; sie kann in der Tat nur unter Wärmeverbrauch Arbeit abgeben.

156. Energiegesetz. — Damit war der Hauptschritt zur Erkenntnis der Energieerhaltung getan. Es waren nur noch, um auch chemische und elektrische Vorgänge mit einzubegreifen, zwei weitere Energieformen, die chemische und die elektrische Energie hinzuzunehmen, was ebenfalls schon Rob. Mayer durchführte und wodurch das Energiegesetz, das „Gesetz von der Erhaltung der Energie", als allgemeingültig erkennbar wurde. Es besagt, daß Energie der Menge nach unveränderlich ist; sie kann zwar verschiedene Formen annehmen, wird dabei aber niemals weder mehr noch weniger. Man kann alle Naturvorgänge als Verwandlungen der verschiedenen Energieformen ineinander betrachten, Verwandlungen, die aber immer so stattfinden, daß die Gesamtmenge der Energie unverändert bleibt.

Wir behandeln die Wärme als Energieform, so wie die chemische Energie in der Wärmelehre (W 71, 126 u. f.) und die elektrische Energie in der Elektrizitätslehre (E 118 u. f., 273 u. f.). Es finden sich allenthalben zahllose Nachweise für die Gültigkeit des Energiegesetzes auch in bezug auf Wärme, chemische und elektrische Vorgänge. Die Nachweise liegen in der quantitativen Behandlung der Vorgänge mit Anwendung des Energiegesetzes, wobei ausnahmslos voller Anschluß an die Wirklichkeit gefunden wird.

Eine Übersicht der 5 Energieformen mit Beispielen ihres Vorkommens und mit der Ermittelungsweise ihrer Menge gibt die Tab. 5.

157. Die Hauptstellung der Energie im Anblick der materiellen Welt. — Seit Erkenntnis des Energiegesetzes konnte Energie — Arbeit —

Tab. 5. **Formen der Energie (Formen von Arbeitsvorrat).**

	Beispiele	Maß in Meterkilogrammen
Potentielle Energie (Spannkraft)	Gehobenes Gewicht; Gespannte Feder	Kraft × Weg
Kinetische Energie (Lebendige Kraft)	Abgeschossene Kugel; Eisenbahnzug in Fahrt	$\text{Masse} \times \frac{(\text{Geschwindigkeit})^2}{2}$
Wärme	Heißer Körper	1 Kalorie = 427 Meterkgr.
Chemische Energie	Pulverladung; Kohlen- und Luftvorrat	(Nach Umwandlung in Wärme zu messen)
Elektrische Energie	Geladene Leydener Flasche	Spannung × Menge. 1 Voltcoulomb (= 1 Voltwebersekunde) = 0·102 Meterkilogramm

gleich einem Stoff erscheinen, von dem niemals etwas neu entsteht noch je etwas verschwindet, wenn er auch unter verschiedenen Formen auftritt. Die Energie war damit neben die Materie und den Äther als ein drittes, stoffähnliches Etwas in der Welt getreten. Allerdings erschien sie im Energiegesetz nicht etwa als ein dritter Bestandteil der materiellen Welt, sondern nur nebenbei, das Verhalten von Materie und Äther quantitativ regulierend. Mit fortschreitender Erkenntnis erscheint aber in letzter Zeit die Energie sogar geradezu in den Mittelpunkt der Darstellung der materiellen Welt gerückt als der Hauptstoff, der Materie und Äther mit umfaßt. Wir werden nicht nur die Einheitlichkeit aller Energieformen zeigen können (E 586, 587), wonach deren Verschiedenheiten nur Folge der Beschränktheit unserer Sinnesorgane sind, sondern es wird die Stoffnatur der Energie besonders noch dadurch deutlich, daß jeder Energiemenge ein räumlicher Sitz zugewiesen werden kann und daß die Wanderungen der Energie im Raume verfolgt werden können (E 588, 593). Es zeigt sich außerdem, daß jede Energiemenge eine ihr proportionale Masse und ein entsprechendes Gewicht hat (E 434, 437, 582). Trägheit und Schwere (Gravitation), ursprünglich an der Materie festgestellt und studiert, sind demnach auch Eigenschaften der Energie. Noch weiter vervollständigte Kenntnis gestattet diese Aussage sogar dahin zu vereinfachen, daß Trägheit und Gravitation überhaupt Eigenschaften der Energie und nur dieser sind (E 583, 585); den Atomen der Materie kommen sie demnach nur insofern ebenfalls und zwar in besonders hohem Maße zu, als in ihnen besonders große Anhäufungen von Energie gefunden sind (E 554).

Die Materie erscheint demnach überhaupt nur als besondere, starke Energieverdichtung noch immer weiter zu erforschender Art. Der Äther ordnet sich damit ebenfalls der Energie zu, indem jeder Energiemenge ihr Ätheranteil gleich einer in größte Entfernungen reichenden Hülle oder Atmosphäre zugeschrieben werden kann (E 584).

158. Eigenart der Anwendung des Energiegesetzes. — Von diesen noch im Werden begriffenen Erkenntnissen unabhängig war das Energiegesetz schon seit Rob. Mayer fortdauernd ein ausgezeichneter, höchst wirksamer Führer durch die Erscheinungswelt. Sein Besonderes ist, daß es oft auch dort quantitative Schlüsse erlaubt, wo Einzelkenntnisse über die betreffenden Vorgänge fehlen. Um Galileis und Newtons Grundgesetz anzuwenden, muß im allgemeinen von Zeitelement zu Zeitelement vorgegangen werden (vgl. 117); das Energiegesetz gestattet dagegen oft unmittelbar Schlüsse vom Anfangszustand auf den Endzustand ohne Betrachtung der Zwischenzustände.

Daß es auf den Übergangsweg von einem Zustand in einen anderen nicht ankommt, sobald nur sicher steht, daß keine unbeachteten Energien hinzukommen oder weggehen, dies hat seinen Grund darin, daß nach dem Energiegesetz auf keinem irgendwie möglichen Übergang die gegebene Anfangsenergie weder mehr noch weniger geworden sein kann, so daß sie im Endzustand in voller Menge, wenn auch in anderer Form sich wiederfinden muß.

Es werden uns viele Beispiele bemerkenswert einfacher Anwendungsmöglichkeit des Energiegesetzes in allen Teilen der Physik begegnen. Hier sei nur ein Fall zur Erläuterung kurz betrachtet. Es werde ein Geschoß senkrecht nach oben gefeuert. Sein Gewicht sei P (kgr), die Geschwindigkeit v (m/sek). Das Geschoß enthält demnach $mv^2/2 = (P/g)v^2/2$ (mkgr) Energie (131) in kinetischer Form. Will man wissen bis zu welcher Höhe H (m) es steigen wird, so hat man nur die Verwandlung in potentielle Energie zu bedenken, was die Gleichung $Pv^2/2g = P \cdot H$ liefert, woraus H (samt dessen Unabhängigkeit von P) sich ergibt. Bedenkt man den Luftwiderstand, der Energie nur in die Form der Wärme übergehen läßt, so kann man sofort behaupten, daß beim Fehlen von h (m) an der vollen (im luftleeren Raum geltenden) Steighöhe H eine Wärmemenge am Geschoß und in der Luft sich finden muß, die Ph/427 (Kalorien) beträgt. Danach ist auch leicht die volle Wärmemenge berechenbar, die bei vollständiger Vernichtung der Geschwindigkeit des Geschosses, ohne Hebung, einträte, etwa wenn es in ein zähes Hindernis trifft. Man findet so leicht, daß ein Geschoß aus Blei bei den gebräuchlichen großen Geschwindigkeiten bei plötzlichem Anhalten zum Schmelzen kommen kann; ebenso wird das Erglühen der Sternschnuppen als bloße Folge ihrer sehr großen Geschwindigkeit verständlich. Auch nach rückwärts kann man die Geschichte des Geschosses mittels des Energiegesetzes verfolgen. Das Geschoß hat seine Geschwindigkeit v innerhalb des Geschützrohres erhalten ausgehend vom Ruhezustand, welcher noch kurz vor der Entzündung der Pulverladung vorhanden war. Die Beschleunigung bis zur Geschwindigkeit v kam durch den Druck der Pulvergase. Die Kraft dieses Druckes, ausgeübt auf die Hinterfläche des Geschosses, muß durchschnittlich von der Größe K (kgr) gewesen sein, so daß $K \cdot l = Pv^2/2g$, wenn l die Länge des Geschützrohres ist. Die aus dieser Gleichung berechnete Kraft, dividiert durch den Rohrquerschnitt (gleich der wirksamen Hinterfläche des Geschosses, in cm^2) gibt auch den mittleren Druck der Pulvergase (in Atm.), der bei der Rohrlänge l und dem Geschoßgewicht P für die Geschwindigkeit v nötig ist. Die Pulvergase müssen bei ihrer Arbeitsleistung längs des Weges l Kl/427 Kalorien Wärme verloren haben; denn sie haben ihre Arbeit an dem Geschoß nur mittels ihrer hohen Temperatur geleistet. In der Tat wird jedes unter Arbeitsleistung sich

dehnende Gas kälter (W 61, 71). Da außerdem noch Wärme an die Umgebung abgegeben wird, muß die Pulverladung noch mehr als Kl (mkgr) Energie enthalten haben, und zwar ist sie darin in Form von chemischer Energie enthalten. Die Entzündung des Pulvers wirkt hier als Auslösung (150); sie leitet die Verwandlung dieser chemischen Energie in Wärme ein, und die Wärme verwandelt sich ihrerseits, während das Geschoß das Rohr durcheilt, in die kinetische Energie des Geschosses. Bei v = 1000 m/sek und P = 100 kgr beträgt diese Energie rund 800000 mkgr. Man sieht, daß gerade in der Form der chemischen Energie sehr große Arbeitsmengen in kleinem Raum und zwar auch lange dauernd und doch jederzeit zur Umwandlung bereit aufgespeichert werden können, wie es in allen Explosivstoffen geschieht (W 131).

Großartige Beispiele der Anwendung des Energiegesetzes finden wir bei der Betrachtung der Energielieferung von der Sonne zur Erde (W 164, 165, O 95).

159. „Prinzipe der Mechanik." — Galileis und Newtons Grundgesetz und das Energiegesetz sind die Grundbestandteile einer Reihe von weiteren „Prinzipen" und „Gleichungen" der Mechanik, welche die zur Behandlung verschiedener verwickelter Bewegungsvorgänge jeweils geeignetsten Formulierungen jener beiden Grundgesetze dem Mathematiker zur Auswahl geben. Neue Naturerkenntnisse treten dabei nicht hinzu, nur um Rechenregeln zur Anwendung der hier von uns bereits vorgebrachten Erkenntnisse handelt es sich; und wenn dieselben auch manchmal Formen annehmen, die als besondere Einblicke in die Beschaffenheit der Natur gelten mögen, so fehlt ihnen doch die mit höchst einfachem Sinn verknüpfte umfassende Bedeutung jener beiden Grundgesetze. Sie gehen daher weniger den Naturforscher an als den Mathematiker, und wir betrachten sie dementsprechend hier nicht weiter.

IV. Behandlung besonderer Bewegungsformen; Drehbewegung; Gravitation.

160. Was wir in der Mechanik noch vorzubringen haben, ist einerseits die Betrachtung einer Anzahl allgemeinwichtiger besonderer Bewegungsformen und andererseits das teils dabei, teils außerdem sich ergebende Studium der verschiedenen, der Materie eigenen Kraftarten mit ihren Sondergesetzen. Die Kenntnis dieser Sondergesetze ist erforderlich, wenn man Galileis und Newtons Grundgesetz oder auch das Energiegesetz auf Erscheinungen anwenden will, bei welchen jene Kraftarten auftreten, von welchen wir bisher fast allein nur die Schwere betrachtet haben. Die noch zu behandelnden Bewegungsvorgänge sind auch insofern wichtig, als sie ebensoviele Prüfungsmöglichkeiten für Galileis und Newtons Grundgesetz abgegeben haben.

Pendelbewegung (schwingende Bewegung).

161. Schwingende Bewegung kommt sehr häufig vor. Unter dem Einfluß der Schwerkraft tritt sie bei jedem Körper ein, der aus stabiler Gleichgewichtslage (111) entfernt und dann seiner Schwere überlassen ist; er kehrt unter Schwingungen in die Gleichgewichtslage zurück, so das Brettchen Abb. 23a oder die Halbkugel Abb. 24a. Aber auch andere Kräfte bringen Schwingungen hervor; die ganze Akustik handelt von elastischen Schwingungen. Wir finden in dieser hin- und hergehenden Bewegung ein besonderes und wohl das wichtigste Beispiel einer ungleichförmig beschleunigten Bewegung.

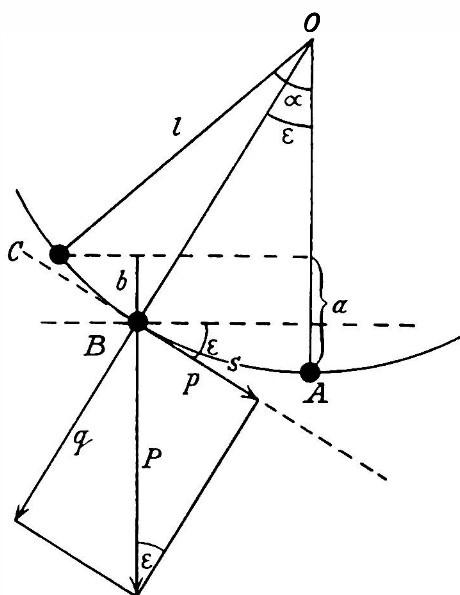


Abb. 31. Fadenpendel.

162. Einfaches Schwerependel. — Ein sehr einfaches Beispiel gibt eine an einem Faden aufgehängte Kugel, das einfache Schwerependel oder „Fadenpendel". In lotrechter Lage OA (Abb. 31) ist es in stabilem Gleichgewicht. Bringt man es aus dieser Lage heraus, etwa bis OB, so wirkt die Kraft P der Schwere der Kugel mit ihrer Komponente p, ganz wie auf einer schiefen Ebene (84, vgl. Abb. 10), und zieht die Kugel nach A zurück. Losgelassen wird daher die Kugel eine der Kraft p und ihrer Masse m nach dem Grundgesetz ent-

sprechende Beschleunigung erfahren. Diese Beschleunigung, mit welcher die Bewegung beginnt, bleibt aber nicht bestehen; sie nimmt mit dem Fortschreiten der Kugel gegen A hin stetig ab, da die Kraft p abnimmt. In A selbst ist die Beschleunigung Null, da dort $p = 0$ ist. Man sieht daraus, daß die Bewegung ungleichförmig beschleunigt ist. Die Ruhelage A wird mit der so erreichten, einen Augenblick lang unverändert bleibenden Höchstgeschwindigkeit durchschritten, worauf die Kraft p ihre Richtung umkehrt, so daß die Beschleunigung nun negativ wird, und zwar wachsend, so daß alle vorhergegangenen Geschwindigkeiten in umgekehrter Reihenfolge wieder durchlaufen werden, bis die Kugel — auf die Ausgangshöhe zurückgekehrt — wieder zum Stillstand kommt, wie wir schon sahen (149, 153), worauf der ganze Vorgang in umgekehrter Richtung zur Wiederholung kommt und so fort.

163. Das Gemeinsame der verschiedenartigen Pendel. — Man sieht am Beispiele des einfachen Schwerependels sowohl die Bewegungsart aller Pendel (168) als auch, was für Pendelbewegungen allgemein gültig ist: Daß sie Folge einer Kraft ist, die die betreffende Masse von allen Seiten her stets zu einer Gleichgewichtslage zurückzieht, zusammen mit der Trägheit, die die Masse in der Ruhelage nicht stillstehen läßt. Das Vorhandensein einer solchen Kraft ist die allgemeine, wesentliche Bedingung für das Auftreten von Pendelbewegung.

Läßt man eine Kugel vom Rande einer kugeligen Schale los, so rollt sie zunächst zum tiefsten Punkt der Schale, um dann weiter, rollend, Pendelbewegungen um diesen Punkt auszuführen. Sie ist ein durch die Schwerkraft getriebenes Pendel — Schwerependel — wie das Fadenpendel.

Jede Magnetnadel, die aus dem Meridian gebracht um denselben schwingt, stellt ebenfalls ein Pendel dar; nach der treibenden Kraftart kann man sie ein magnetisches Pendel nennen.

Sehr häufig sind die elastischen Pendel. Ein an einem Ende festgeklemmter Stab, den man elastisch verbiegt und dann freiläßt, führt Pendelbewegung aus (s. Abb. 35). Die Uhrunruhe ist auch ein elastisches Pendel.

164. Phasen; Amplitude, Elongation. — Man nennt die verschiedenen Zustände, welche eine pendelnde Masse durchläuft — gegeben durch Lage und Geschwindigkeit — auch „Phasen". Der Name ist besonders bei Schwingungsbewegungen und auch sonst bei verwandten pendelartigen Vorgängen als für solche besonders bezeichnend in Gebrauch.

Der augenblickliche Abstand des schwingenden Punktes (Körpers) von der Ruhelage wird gewöhnlich Elongation (Ausweichung) genannt. Die größte vorkommende Elongation, bei welcher die Umkehr erfolgt, nennt man Amplitude (Schwingungsweite).

Sowohl Elongation als Amplitude können in Winkelmaß (ε, bzw. α in Abb. 31) angegeben werden, was für das Fadenpendel und andere um eine Achse sich drehende Pendel das Gegebene ist, im allgemeinen aber in Längenmaß, als Wege des betrachteten schwingenden Punktes (Längenelongation).

165. Einfachstes Kraftgesetz für Pendelschwingungen. — Beim elastischen Pendel ist das Kraftgesetz, von dem die ganze Bewegung in ihren Einzelheiten abhängt, möglichst einfach. Denn jede elastische Verformung eines Körpers weckt eine rücktreibende Kraft in ihm, die proportional der

Verformung, also der Elongation ist (255). Der gebogene, um seine unverbogene Gleichgewichts- oder Ruhelage schwingende Stab (Abb. 35) wird daher stets von einer Kraft p getrieben, die proportional seiner Elongation ε ist. Elastische Pendel haben daher die einfachste Schwingungsart (Sinusschwingungen, 168).

Beim Schwerependel ist dagegen (s. Abb. 31) $p = P \sin \varepsilon$, die Kraft also proportional nicht der Elongation selbst, sondern deren Sinus, was weniger einfach ist. Da jedoch bei nicht sehr großen ε Sinus und Winkel (letzterer stets am Einheitskreis gemessen, vgl. Note zu 112) nahe einander gleich sind (vgl. Abb. 32), kann auch für das Schwerependel (ebenso für das magnetische und für alle die vielen ähnlichen Pendel) die treibende Kraft p einfach proportional der Elongation ε gesetzt werden, wie beim elastischen Pendel, wenn es nicht gerade auf besonders große Amplituden ankommt.

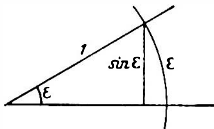


Abb. 32.
Sinus und Winkel.

Wir setzen demnach für alles zunächst Folgende $p = P \cdot \varepsilon$ und betrachten eingehend diesen Fall der einfachen Proportionalität, der alles für Pendel überhaupt Wesentliche zusammenfaßt; nur zum Schlusse geben wir an (175), was bei großen Amplituden der Schwerependel und ähnlicher Pendel hinzukommt.

166. Berechnung der Pendelbewegung nach dem Grundgesetz. — Da das Gesetz der treibenden Kraft somit gegeben ist, muß die ganze Bewegung durch Galileis und Newtons Grundgesetz vorausberechenbar sein. Die Berechnung ist in der schon angegebenen Weise (117) — entsprechend dem Sinn des Grundgesetzes — mittels Zeitelementen und Wegelementen durchzuführen.[1]) Es folgen hier die Ergebnisse für die Schwingungsdauer (167) und für die ganze Bewegungsart (168).

167. Schwingungsdauer. — Die wichtigste Frage ist bei jedem Pendel die nach der Schwingungsdauer T, d. i. nach der Zeit eines vollständigen Hin- und Herganges. Sie ergibt sich zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad 167a)$$

wenn m die schwingende Masse ist und k die Kraft, welche sie bei der Längenelongation Eins nach der Gleichgewichtslage zieht. Diese auf Einheitselongation bezogene Kraft oder, was beim einfachsten Kraftgesetz (165) dasselbe ist, der Quotient aus Kraft und Längenelongation, wird auch Direktionskraft (Richtkraft) des Pendels genannt, $k = K/s$.

Es ist einzusehen, daß die Gl. 167a für die Schwingungsdauer nahezu das einfachste Mögliche ist. Denn bei vergrößerter Masse m muß die Schwingung langsamer werden (daher m im Zähler), bei vergrößerter Richtkraft schneller (daher k im Nenner), und die Wurzel ist nötig, weil m/k nach der Beschaffenheit der beiden Größen (m = Kraft/Beschleunigung, k = Kraft/Länge) keine Zeit bedeutet, sondern das Quadrat einer Zeit. Nur der Faktor 2π wäre ohne Rechnung nicht auffindbar.

---

[1]) Man sehe Anhang M I a.

Liefert im besonderen die Schwere P der Masse m die Direktionskraft k, wie beim **Fadenpendel**, so ist dieselbe $k = p/s = P\varepsilon/s$ (vgl. 165) oder, da $\varepsilon = s/l$, wenn l die Pendellänge ist (vgl. Note zu 112 und Abb. 31), $k = P/l$. Da außerdem $m = P/g$ (131), so wird nach Gl. 167a die Schwingungsdauer des einfachen Schwerependels

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad 167b)$$

168. Bewegungsart, Sinusschwingung. — Will man wissen, wo der schwingende Punkt (etwa der Mittelpunkt der Kugel des Schwerependels) zu irgendeiner gegebenen Zeit sich befindet, so zeichne man mit der gegebenen Amplitude als Halbmesser einen Kreis (Abb. 33), dessen Durchmesser $\overline{0\ 8}$ dann die Bahn des schwingenden Punktes sei mit der Ruhelage in der Mitte. Läßt man nun einen Hilfspunkt in gleichförmiger Bewegung dauernd am Kreise laufen, so daß er in gleichen Zeitabständen die Marken 0, 1, 2, ... am Kreise passiert, so führt die Projektion dieses Punktes auf den Durchmesser die verlangte Pendelbewegung aus. Die Pendelkugel wird also in gleichen Zeitabständen die Punkte 0 .... 8 am Durchmesser und dann wieder zurück 7 ... 0 erreichen. Man sieht, daß die Umlaufszeit des Hilfspunktes am Kreise gleich der Schwingungsdauer T gewählt werden muß und daß die in der Abbildung gezeichneten Punkte die Lagen der Pendelkugel nach je $^1/_{16}$ Schwingungsdauer angeben. Die Geschwindigkeit des Hilfspunktes am Kreise ist bei der Amplitude S $2\pi S/T$, und dies ist auch die Höchstgeschwindigkeit, welche die Pendelkugel beim Passieren der Gleichgewichtslage erhält.

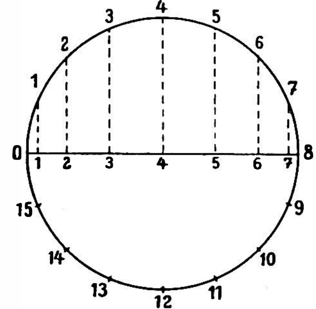


Abb. 33. Pendelbewegung.

Die so geometrisch dargestellte Bewegung kann auch durch eine Sinusfunktion beschrieben werden[1]), weshalb diese allereinfachste Art von Schwingung auch **Sinusbewegung** genannt wird.

169. Galileis Einzelgesetze für das Schwerependel (mit nicht zu großen Amplituden). — Zur Gl. 167b für das Schwerependel gelangte bereits Huygens bei seiner Fortsetzung von Galileis Untersuchungen; ohne noch die Infinitesimalrechnung zu besitzen verfolgte er (mittels eines Gedankenversuchs) staunenswerte Wege, die auch eine Fülle von Nebenergebnissen lieferten, auf die wir noch zurückkommen (178 u. f.). Galilei war aus Beobachtungen schwingender Fadenpendel zu Einzelaussagen der Gl. 167b gekommen, nämlich zu drei Pendelgesetzen (170, 171, 173), die er in Zusammenhang mit seinen Untersuchungen über Fall und Wurf weiter prüfte und die, wie wir sehen werden, Bestätigungen des Grundgesetzes bilden.

170. Galileis 1. Pendelgesetz sagt: **Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Größe der Amplitude.** Man überzeugt sich leicht an Fadenpendeln, daß dies in überraschend weitgehender Weise zutrifft. Erst bei Amplituden über 60° merkt man nicht allzu schwer, daß so große Amplituden

[1]) Siehe Anhang M I a.

eine etwas vergrößerte Schwingungsdauer ergeben (wie es sein muß, weil dann die Ungleichheit $\sin \varepsilon < \varepsilon$ stark wird; vgl. 165 und Abb. 32).

Daß bei einer Kraft, die — wie wir es annahmen (165) — genau proportional der Amplitude ist, die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude dem Grundgesetz entspricht, ist unmittelbar einzusehen: Man denke zwei gleiche Pendel A und B (Abb. 34) mit einfacher, bzw. doppelter Amplitude losgelassen. Wenn B durch die doppelte Kraft angetrieben wird, erhält es auch doppelte Beschleunigung (b), also erhält es in einer ersten, kurzen Zeit doppelten Geschwindigkeitszuwachs ($v = bt$) und legt es auch doppelten Weg zurück ($s = bt^2/2$, s. 134) im Vergleich zu A. Dann bleibt aber die Elongation von B immer noch doppelt so groß als die von A, und es gelten somit die doppelte Beschleunigung für B und die Folgen daraus auch weiterhin, und da B auch den doppelten Weg bis zur Ruhelage O hat, werden A und B zugleich dort ankommen, wie es die Beobachtung bei nicht sehr großer Amplitude auch zeigt.

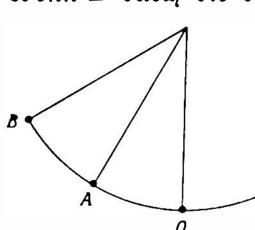


Abb. 34. Schwingungsdauer und Amplitude.

In den Schwingungsdauergleichungen 167a und b ist die Unabhängigkeit von der Amplitude enthalten; denn die Amplitude kommt in ihnen nicht vor.

Die beobachtete Unabhängigkeit von der Amplitude ist ein neues Beweisstück für das Zutreffen des Grundgesetzes.

Für die Anwendung in den Uhren ist die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Amplitude von entscheidender Wichtigkeit, da sonst der Gang der Uhren vom wechselnden Reibungszustand, der die Amplituden beeinflußt, abhängig wäre. Es haben daher die Pendel von Normaluhren immer nur sehr kleine Amplituden (vgl. 175, 176).

171. Galileis 2. Pendelgesetz sagt, daß die Schwingungsdauer unabhängig ist von Masse und Stoff der Pendelkugel. Die Beobachtung zeigt dies. Galilei ließ zwei Pendel gleicher Länge, das eine mit einer Bleikugel, das andere mit einer Korkkugel, schwingen und fand, daß sie dauernd in gleichem Takte blieben. Er betrachtet diesen Versuch sogleich als eine Bestätigung des gleichschnellen Fallens aller Körper; denn auch beim Fadenpendel fällt die Kugel nur durch ihre Schwere zur Gleichgewichtslage herab, und daß dies auf kreisförmig schräger Bahn erfolgt, ändert nichts an der Beweisfähigkeit von Vergleichsversuchen bei verschiedenen Körpern, da die Kreisbahn bei gleicher Pendellänge genau die gleiche ist und zudem auch genügende Unabhängigkeit von der Amplitude besteht.

Galilei erblickt in diesen Pendelversuchen von vornherein eine wesentliche Verfeinerung der Versuche über freien Fall (122). Denn erstens ist die Pendelbewegung langsamer, also weniger der Reibung unterworfen als die freie Fallbewegung und zweitens wiederholt sie sich von selber durch lange Zeiten weiter, so daß etwa bestehende kleine Unterschiede zwischen verschiedenen Körpern in Vergrößerung merklich werden müßten. Daß die Pendel verschiedenen Stoffes solche Unterschiede nicht zeigen, dies ist in der Tat der leichtest zugängliche Nachweis für das Bestehen der von vornherein gar nicht einzusehenden Proportionalität von Gewicht (Schwerkraft, Gravitation) und Masse (Trägheit; vgl. 123).

172. Da diese Proportionalität von Gewicht und Masse eine Eigenschaft der in ihrem Wesen bis heute ganz unbekannt gebliebenen und doch so allwirksamen Schwerkraft (Gravitation) darstellt (127), war man auch nach Galilei immer noch weiter bemüht, die Proportionalität auf stets noch weiter verfeinerte Proben zu stellen. Newton ließ Pendel aus Gold, Silber, Blei, Glas, Sand, Kochsalz, Holz und auch Weizen schwingen, letzteres um auch Belebtes zu prüfen, jedoch ohne Abweichungen zu finden. Bessel verfeinerte diese Pendelversuche 140 Jahre später noch weiter, und er zog auch außerirdische Stoffe, Meteorstein und Meteoreisen, hinzu, wieder ohne Abweichungen von jener Proportionalität zu finden. Das gleiche Ergebnis hatten schließlich auch noch sehr viel weiter verfeinerte Messungen nach abgeändertem Verfahren (204) mit Einbeziehung auch radioaktiver Stoffe (vgl. E 582).

Danach darf man die schon aus dem gleichschnellen Fall aller Körper (123) geschlossene Proportionalität von Gewicht (Gravitation) und Masse (Trägheit) nun als vortrefflich gesicherte Grundlage zum weiteren Vordringen in ein Verstehen der Materie sowohl als der Gravitation festhalten.

Die Besonderheit der Schwere (Gravitation) als Kraftart, massenproportional zu sein, wird sehr deutlich, wenn man das Schwerependel etwa mit einem elastischen (oder auch einem magnetischen) Pendel vergleicht. Man nehme einen einerseits eingeklemmten steifen Stahldraht und befestige an seinem anderen Ende eine Korkkugel (Abb. 35); er wird dann — aus der Gleichgewichtslage gebracht und losgelassen — sehr schnell schwingen. Ersetzt man aber die Korkkugel durch eine Bleikugel, so wird er viel langsamer schwingen. Hier bleibt die treibende Kraft der Schwingungen (die Direktionskraft k, 167) ungeändert, denn sie sitzt als elastische Kraft im ungeändert gebliebenen Stahldraht, und sie muß der vergrößerten Masse eine entsprechend verringerte Beschleunigung erteilen, was die der Gl. 167a entsprechende Schwingungsdaueränderung zur Folge hat; beim Schwerependel dagegen ergibt vergrößerte Masse auch vergrößerte Kraft, so daß die Beschleunigung und damit auch die Schwingungsdauer ungeändert bleibt.

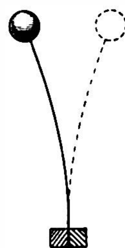


Abb. 35. Elastische Schwingung.

Die aus dem Grundgesetz und der Annahme jener Proportionalität hergeleitete Pendelgleichung 167b bringt die Unabhängigkeit der Schwingungsdauer des Schwerependels von Größe, Masse, Stoffart des Pendelkörpers dadurch zum Ausdruck, daß sie von all dem überhaupt nichts enthält.

173. Galileis 3. Pendelgesetz sagt, daß die Schwingungsdauern verschieden langer einfacher Schwerependel wie die Quadratwurzeln aus ihren Längen sich verhalten. Auch dies prüfte Galilei durch Versuche, die auch heute leicht zu wiederholen sind. Ein 1 m langes Fadenpendel hat sehr nahe 2 Sek. Schwingungsdauer; zu einem einzelnen Hin- oder Hergang braucht es also 1 Sek., weshalb man es mit Rücksicht auf die Anwendung in den Uhren, wo die Halbschwingungsdauer zur Geltung kommt, auch meist „Sekundenpendel" nennt. Für 2 Sek. Halbschwingungsdauer muß das Pendel 4 m lang sein, für 3 Sek. 9 m usf.

Man kann diesen Zusammenhang unmittelbar aus dem Grundgesetz einsehen, wenn man die kreisförmigen Bahnen zweier ungleich langer, sonst aber

gleicher Pendel A und B in gleich viele kleine Stücke teilt, wie es Abb. 36 zeigt. Je zwei gleichgelegene Stücke, z. B. a und b, stellen schiefe Ebenen gleicher Neigung dar, auf welchen die beiden Pendelkugeln fallen. Es unterliegen daher beide Pendel, A und B, der Reihe nach gleichen Kräften und daher nach dem Grundgesetz auch gleichen Beschleunigungen, so daß für beide ein und dieselbe mittlere Beschleunigung b_m längs ihrer Wege A A′ bzw. B B′ gelten wird. Man kann dann beim Vergleich der beiden Pendel trotz ungleichförmiger Beschleunigung mit dieser mittleren Beschleunigung b_m rechnen nach der Gleichung $s = b_m t^2/2$ (134). Da aber die beiden Wege s, nämlich A A′ und B B′, sich verhalten wie die beiden Pendellängen, müssen wegen der Gleichheit von b_m die beiden Zeitquadrate t^2 ebenso sich verhalten, die beiden Zeiten und damit auch die beiden Schwingungsdauern also wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen, wie es Galileis Satz sagt. Die Erfahrungsbestätigung des Satzes bedeutet somit wieder einen neuen Nachweis der Richtigkeit des Grundgesetzes.

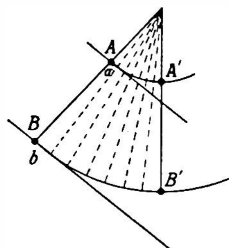


Abb. 36. Schwingungsdauer und Pendellänge.

174. Messung der Schwerebeschleunigung g mittels des Pendels. — Dem 3. Satz entsprechend enthält die Pendelgleichung 167b die Länge l unter der Quadratwurzel. Sie gibt, darüber hinausgehend, auch noch den Zusammenhang mit der Beschleunigung g des freien Falls. Es ist daher das Fadenpendel zur Messung von g verwendbar, wobei man gegenüber der Benutzung der freien Fallbewegung den Vorteil der verlangsamten und stets von selber sich wiederholenden Bewegung hat (vgl. 171). Ist die Länge l des einfachen „Sekundenpendels“ (T = 2 sek) 1 m, was nahe zutrifft, so ergibt sich nach Gl. 167b $g = 4\pi^2 l/T^2 = \pi^2 \text{m/sek}^2 = 9{\cdot}86\ \text{m/sek}^2$ (wofür wir öfter rund $10\ \text{m/sek}^2$ gesetzt hatten, 136). Zu genauesten Ermittelungen von g dient am besten das weiter unten zu betrachtende Reversionspendel (190).

175. Schwerependel bei großen Amplituden. — Es ist nun noch zu beachten, was das Sinus-Gesetz der Kraft, welches, wie wir sahen (165), für das Schwerependel (auch für das magnetische, nicht aber für elastische Pendel) gilt, an unseren bisherigen Betrachtungen (166 bis 174) ändert, für welche wir nicht $p = P \sin \varepsilon$, sondern $p = P\varepsilon$ angenommen haben. Daß die Änderung nicht groß ist, wenn ε nicht sehr groß wird, haben wir schon bemerkt (170). Rechnet man nach dem Grundgesetz mit $p = P \sin \varepsilon$ (was auch mit den Mitteln der Infinitesimalrechnung nicht ganz einfach ist), so erhält man für die Schwingungsdauer bei der Amplitude α

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{4} + \ldots\right). \qquad 175)$$

Die Schwingungsdauer zeigt sich jetzt abhängig von der Amplitude, was schon oben als Beobachtungsergebnis erwähnt wurde (170). Die Abhängigkeit ist durch die unendliche Reihe in der Klammer gegeben, die zur einfachen Pendelgleichung 167b hinzugetreten ist. Der Zahlenwert der Reihe ist von 1 aber so wenig verschieden,[1]) und zwar um so weniger, je kleiner α ist, daß ihre Beachtung nur bei besonders genauen Messungen, wie etwa zur Ermittelung von g, in Betracht kommt.

176. Zykloidenpendel. — Man kann fragen, was an dem Schwerependel geändert werden müßte, um auch bei größten Amplituden unveränderte Schwingungsdauern zu erhalten. Huygens hat diese Frage bereits beantwortet: Man müßte der Pendelkugel nicht eine

---

[1]) $\frac{1}{4}\sin^2\frac{30^0}{2} = 0{\cdot}017$, und die weiteren Glieder sind noch viel kleiner.

Kreisbahn, sondern eine Zykloiden- (Radlinien-) bahn vorschreiben. Huygens hat für seine Pendeluhren in der Tat schon Zykloidenpendel benutzt; jedoch die Geringfügigkeit des Amplitudeneinflusses auch beim gewöhnlichen Pendel, das einfacher ist, hat wieder zu diesem zurückkehren lassen, da man große Amplituden bei den Uhren leicht vermeiden kann.

177. Anwendung des Energiegesetzes auf das Pendel. — Bemerkenswert ist, daß das Energiegesetz unter allen Umständen, bei beliebig großen Amplituden und beliebig geformter Bahn der Pendelkugel, sehr leicht die Geschwindigkeiten an beliebigem Punkte der Bahn angibt: Es muß beim Schwerependel nach diesem Gesetz — in leicht verständlicher Weise — die Geschwindigkeit der von C (Abb. 31) losgelassenen Kugel im Punkte B genau so groß sein wie die Endgeschwindigkeit eines durch die Strecke b frei gefallenen Körpers, und bei A so groß wie nach freiem Fall durch die Strecke a (vgl. 149). Nur wenn man nach dem Zusammenhang von Weg und Zeit frägt, treten bei großen Amplituden die mathematischen Umständlichkeiten (175) auf.

Drehbewegung.

178. Fortschreitende Bewegung und Drehbewegung. — Aus der fortgesetzten Untersuchung der Pendelbewegung ist auch die allgemeinwichtige Kenntnis von den Eigentümlichkeiten der überall häufig vorkommenden Drehbewegung hervorgegangen, wie das Folgende zeigen wird. Drehbewegung ist von jedem Rade her bekannt. Jedes Wagenrad zeigt außerdem das gleichzeitige Vorkommen von Drehbewegung und fortschreitender Bewegung an demselben Körper: Das Rad am fahrenden Wagen hat außer seiner Drehbewegung auch die fortschreitende Bewegung seiner Achse und des ganzen Wagens. Der ungestörten Übereinanderlagerung von Bewegungen (43—45) zufolge können die beiden Bewegungsarten stets gesondert verfolgt und zum Endergebnis einfach (geometrisch) addiert werden. Allerdings kommt es vor, daß die beiden Bewegungen nicht unabhängig voneinander verlaufen, was gesondert zu berücksichtigen ist, wie es bei dem ohne Gleiten rollenden Wagenrade der Fall ist, dessen Drehgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit der Fortbewegung fest verbunden ist.

179. Das zusammengesetzte Pendel. — Bisher hatten wir als Pendelkörper in der Hauptsache eine (kleine) Kugel angenommen, von der nur der Mittelpunkt zu betrachten war. Es gelten aber unsere Ergebnisse auch für einen beliebig geformten und beliebig großen Pendelkörper, wenn er nur Parallelbewegung — nicht Drehungen — ausführt, so daß stets alle seine Punkte gleiche Geschwindigkeiten haben, wie z. B. wenn ein beliebiges Gewicht an einem leichten elastischen Faden hängend auf- und abpendelt. Kommen jedoch Drehungen vor, wobei die verschiedenen Massenteile des Pendelkörpers verschiedene Geschwindigkeiten haben, oder kommen überhaupt, aus irgendeinem Grunde Geschwindigkeitsunterschiede in der pendelnden Masse vor, so reichen unsere bisherigen Betrachtungen nicht aus. Dies ist aber sogar bei jedem gewöhnlichen Uhrpendel der Fall; denn es dreht sich immer als Ganzes um die durch die Aufhängung gegebene Achse. Ist der Pendelkörper einigermaßen umfangreich, wie z. B. wenn das in Abb. 23a dargestellte Brett um seine stabile Gleichgewichtslage schwingt, so kann man ihm auch nicht in Annäherung eine einheit-

liche Geschwindigkeit zuschreiben. Man nennt ihn dann ein „zusammengesetztes Pendel" im Gegensatz zum „einfachen", das wir wie einen einzelnen schwingenden Punkt behandeln konnten.

Die besondere Untersuchung, welche hier nötig ist, bezieht sich vor allem auf die Schwingungsdauer des zusammengesetzten Pendels; die Bewegungsart an sich ist nicht verschieden von der des einfachen Pendels (168).

Man nehme als einfaches Beispiel eines zusammengesetzten Pendels die Stange a, Abb. 37, mit ihrem Schwerpunkt S in der Mitte, drehbar aufgehängt um die Achse xx und als Schwerependel schwingend. Man überzeugt sich leicht durch einen Versuch, daß es nicht angeht, die Stange etwa durch ihren Schwerpunkt zu ersetzen: Das einfache Pendel d von halber Stangenlänge schwingt viel schneller als die Stange. Das Pendel b von ganzer Stangenlänge schwingt dagegen viel langsamer als die Stange. Das letztere ist selbstverständlich. Denn denkt man die Stange quer zu ihrer Länge in kleine Teile zerlegt, so würde nur der unterste Teil, wenn er allein an xx aufgehängt wäre, mit b übereinstimmend schwingen; die höhergelegenen Teile würden für sich allein alle schneller schwingen. Da an der Stange alle diese Teile fest miteinander verbunden sind, müssen sie irgendeine gemeinsame, mittlere Schwingungsdauer annehmen, und es ist die Frage, wie dieselbe nach dem Grundgesetz zu berechnen sei.

Abb. 37. Reduzierte Pendellänge.

180. Begriffliche Erfassung der Drehbewegung. — Wir führen vor allem die besonderen Begriffe ein, die der Behandlung der Drehbewegung angemessen sind; danach wird — wie immer — alles übrige einfach.

Winkelgeschwindigkeit ω. Bei Drehbewegung eines festen Körpers um die Achse 0 (Abb. 38) haben die verschiedenen Teile desselben, z. B. A, B, verschiedene Geschwindigkeiten. Um eine für den ganzen Körper einheitlich geltende Geschwindigkeitsangabe zu machen ist daher der gewöhnliche (Linear-) Geschwindigkeitsbegriff (37) untauglich; wohl aber ist die Angabe des Winkels, um den der ganze Körper gedreht ist, im Verhältnis zur Zeit, in welcher dies erfolgte, ein treffendes Maß für die Geschwindigkeit der Drehung des ganzen Körpers. Eben dies ist die Winkelgeschwindigkeit; ω = Winkel/Zeit.

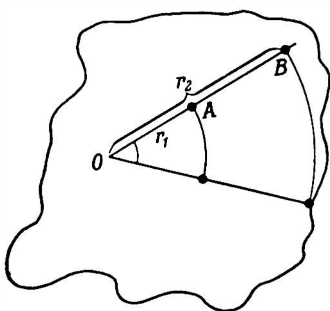


Abb. 38. Drehbewegung.

Winkelbeschleunigung β ist dementsprechend der Zuwachs der Winkelgeschwindigkeit im Verhältnis zur Zeit, in welcher er erfolgt ist.

$$\beta = (\omega_2 - \omega_1)/t_{1,2} = d\omega/dt \text{ (vgl. 50 und 54).}$$

Da die Winkel am Einheitskreis gemessen werden (vgl. Note zu 112) kann man auch sagen, daß Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung durch Betrachtung eines im Abstande Eins von der Achse befindlichen Punktes den Drehzustand des ganzen Körpers angeben. Es ist $\omega = v/r$, $\beta = b/r$, wenn v

die gewöhnliche (lineare) Geschwindigkeit, b die lineare Beschleunigung im Abstande r von der Achse ist.

Drehmoment D. Daß die Wirkung einer Kraft bei Drehung nicht durch die Kraft allein, sondern durch das Produkt ihrer Größe mit ihrem senkrechten Abstand von der Achse — das Drehmoment — bestimmt ist, dies sahen wir schon für die Fälle des Gleichgewichts ein (97), und es gilt auch für Bewegung.

Man bemerkt, daß das Drehmoment einer beliebigen gegebenen Kraft auch diejenige Kraft angibt, die mit dem Arm Eins dieselbe Drehwirkung ausüben würde, wie die gegebene Kraft.

181. Trägheitsmoment M. Neu ist die Frage nach dem richtigen Maß der Trägheit eines Körpers bei Drehung um eine gegebene Achse. Eben dieses Maß wird Trägheitsmoment genannt. Um es zu gewinnen beachtet man am besten die Arbeit, die gegen Trägheit zu leisten ist, wenn dem Körper eine gegebene Winkelgeschwindigkeit erteilt werden soll. Diese Arbeit für die Erteilung einer bestimmten Geschwindigkeit ist bei der fortschreitenden Bewegung Proportionalmaß der Masse (Gl. 146), und sie wird es daher in entsprechend richtiger Weise auch für die Drehbewegung sein. Die Arbeit ist nach vollzogener Beschleunigung als kinetische Energie in dem Körper enthalten (145—147) und daher leicht berechenbar.

Es sei zunächst ein einzelner Massenteil des Körpers betrachtet, etwa das Raumelement A mit der Masse m im Abstande r_1 von der Achse (Abb. 38). Erhält der Körper von der Ruhe aus eine bestimmte Winkelbeschleunigung, so erhält die Masse m nach bestimmter Zeit eine bestimmte (lineare) Geschwindigkeit v, und die dabei gegen die Trägheit geleistete Arbeit ist $mv^2/2$. Da v vom Abstand r abhängig ist und bei gleicher Winkelbeschleunigung diesem proportional wächst, so wächst auch die Trägheitsarbeit mit dem Abstand und zwar, da für dieselbe v^2 maßgebend ist, proportional dem Quadrat des Abstandes. Würde also dieselbe Masse m von A nach B, in doppelten Abstand von der Achse gebracht und dort befestigt, so würde ihre Trägheitswirkung vervierfacht, genau so als hätte man in A die Masse 4 m angebracht. Man sieht daraus, daß bei Drehbewegung nicht mehr die Masse allein maßgebend ist für das Sträuben gegen Beschleunigung, sondern das Produkt der Masse mit dem Quadrat ihres Abstandes von der Drehachse. Eben dieses Produkt ist das Trägheitsmoment der Masse um die betreffende Achse.

Ist ein Körper aus beliebig vielen Massen m_1, m_2, ... zusammengesetzt, deren Abstände von der Achse r_1, r_2, ... sind, so addieren sich die Trägheitswirkungen der einzelnen Massen (60); das Trägheitsmoment des ganzen Körpers ist demnach

$$M = m_1 r^2_1 + m_2 r^2_2 + \dots \text{ oder, kürzer geschrieben: } M = \Sigma mr^2. \qquad 181)$$

Das Trägheitsmoment hat die Bedeutung derjenigen Masse, die für sich allein im Abstand Eins von der Drehachse angebracht die gleiche Trägheit gegen Drehung ergäbe, die der betreffende Körper mit seiner beliebigen Massenverteilung hat. Denn es ist $\Sigma mr^2 = M \cdot 1^2$.

182. Ermittelung von Trägheitsmomenten. — Bei geometrisch wohldefinierten Körpern mit gegebener Dichte oder Dichtenverteilung kann das Trägheitsmoment stets nach Gl. 181 als Summe berechnet werden. Die Summe wird, genau genommen, aus unendlich vielen Summanden bestehen, da man

den Körper in unendlich kleine Raumelemente zerlegen muß, um für jedes einen genauen Abstand r von der Achse angeben zu können. Für die Berechnung solcher Summen aus unendlich vielen unendlich kleinen Summanden, Integrale genannt, ist die Infinitesimalrechnung eingerichtet[1]).

Besteht der Körper aus einzelnen, räumlich ziemlich konzentrierten Massen, so kann in Annäherung gut und einfach mit ebenso vielen einzelnen Summanden gerechnet werden. Das Trägheitsmoment eines Schwungrades mit nicht zu dicken Speichen ist beispielsweise in der Hauptsache sogar durch einen einzigen Summanden gegeben, da fast die ganze Masse im Radkranz ist und also nur einerlei Abstand von der Achse hat.

Ist der Körper geometrisch nicht einfach begrenzt, oder ist seine innere Massenverteilung unbekannt, so kann das Trägheitsmoment nur experimentell ermittelt werden (187).

183. Trägheitsmomente um verschiedene Achsen. — Wichtig ist die Bemerkung, daß ein gegebener Körper keineswegs ein bestimmtes Trägheitsmoment hat, sondern daß sein jeweiliges Trägheitsmoment von der Lage der Achse abhängt. Denn es ändern sich mit Änderung der Achsenlage im allgemeinen alle Abstände r, und daher ändert sich auch Σmr^2.

Am kleinsten kann das Trägheitsmoment werden, wenn die Achse durch den Schwerpunkt geht, da dann die r durchschnittlich am kleinsten werden können, weil der Schwerpunkt als mittlerer Ort der Gewichtsteile des Körpers (107) auch mittlerer Ort seiner Massenteile ist (123). Jedoch ergeben verschieden gerichtete Schwerpunktsachsen im allgemeinen auch verschieden große Trägheitsmomente; es gibt eine Schwerpunktsachse kleinsten und eine solche größten Trägheitsmomentes.

Ein Stab z. B. hat sein kleinstes Trägheitsmoment um eine Schwerpunktsachse die in seine Längsrichtung fällt; senkrecht dazu gerichtete Schwerpunktsachsen geben in leicht ersichtlicher Weise größere Trägheitsmomente. Noch größere Trägheitsmomente hat der Stab bei Achsen die nicht durch den Schwerpunkt gehen.

184. Einfache Behandlung der Drehbewegung. — Da, wie wir sahen (180, 181), Winkelgeschwindigkeiten, Winkelbeschleunigungen, Drehmomente und auch Trägheitsmomente sämtlich auf den Abstand Eins von der Achse sich beziehen, so hat man bei Anwendung dieser vier Größen stets den Fall, als wären nur Massen am Einheitskreise um die Achse vorhanden und nur Kräfte, die an diesem in tangentialer Richtung angreifen, und als würden alle Geschwindigkeiten und Beschleunigungen ebenfalls an diesem Kreise gemessen. Dies hat den Erfolg, daß man mit jenen vier Größen bei Drehbewegung genau so rechnen kann wie mit den vier entsprechenden Größen — Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft und Masse — bei fortschreitender Bewegung, womit die Behandlung der Drehbewegung großenteils auf die bereits erledigte Behandlung der fortschreitenden Bewegung zurückgeführt ist. Tab. 6 enthält die einander entsprechenden Größen für fortschreitende Bewegung und für Drehbewegung in Nebeneinanderstellung. Im unteren Teile der Tabelle sind Anwendungsfälle der Größen gegeben, wobei man sieht, in wie einfacher Weise

[1]) Ein Beispiel solcher Berechnung findet sich im Anhang M II.

Tab. 6.

Fortschreitende Bewegung	Drehbewegung
Weg s Geschwindigkeit v Beschleunigung b Kraft K Masse m	Winkel ε Winkelgeschwindigkeit ω Winkelbeschleunigung β Drehmoment D Trägheitsmoment M
Grundgesetz $b = \frac{K}{m}$	$\beta = \frac{D}{M}$
Kinetische Energie $\frac{mv^2}{2}$	$\frac{M\omega^2}{2}$
Bewegungsgröße mv	$M\omega$
Direktionskraft $k = \frac{K}{s}$	$\frac{D}{\varepsilon}$

die Drehbewegung — ganz wie die fortschreitende Bewegung — mit Hilfe dieser Größen zu behandeln ist.

185. Unmittelbar ist hiernach auch die Schwingungsdauer T eines zusammengesetzten Pendels mit Drehbewegung anzugeben. Es ist, entsprechend Gl. 167a,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{D/\varepsilon}}. \quad 185)$$

Wir betrachten im folgenden 4 bemerkenswerte Beispielsfälle mit Hinzufügung einiger Anwendungen (186—192).

186. 1. Stab, am einen Ende als Schwerependel aufgehängt (Abb. 37a). Da die Schwerkraft im Schwerpunkt S angreift (106), der in der Mitte des Stabes liegt, ist $D = P \sin \varepsilon \cdot L/2$ (vgl. 165 und Abb. 31; P Gewicht, L Länge des Stabes), wofür wir für kleine Amplituden setzen $D = P\varepsilon L/2$ (165). Es ist daher die Direktionskraft $D/\varepsilon = PL/2$. Das Trägheitsmoment M kann als Σmr^2 berechnet werden. Man findet[1]) $M = mL^2/3$, wenn m die Gesamtmasse des Stabes ist. Da $m = P/g$ (131), wird $M = PL^2/3g$ und also (Gl. 185) $T = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3} L/g}$.

Vergleicht man dies mit der Schwingungsdauer des einfachen Fadenpendels (167b), $2\pi\sqrt{l/g}$, so sieht man, daß der Stab dieselbe Schwingungsdauer haben muß wie ein einfaches Fadenpendel von der Länge $l = \frac{2}{3} L$ (Pendel c in Abb. 37), was man durch Versuch auch bestätigt findet.

Man nennt die Länge des einfachen Pendels von gleicher Schwingungsdauer auch die reduzierte Pendellänge des zusammengesetzten Pendels. Die reduzierte Pendellänge des um sein Ende schwingenden Stabes ist somit 2/3 seiner Länge.

187. Die experimentelle Ermittelung von Trägheitsmomenten erfolgt durch Anwendung von Gl. 185. Man läßt den gegebenen Körper Drehschwingungen um seine Achse machen, indem man ihm eine (an den Massen nichts ändernde) Direktionskraft $k' = D/\varepsilon$ gibt (etwa elastischer Art), und mißt die Schwingungsdauer T. Ist k' bekannt, so wird M aus Gl. 185 sofort berechenbar. Ist k' unbekannt, so fügt man dem gegebenen Körper in einem zweiten

[1]) Siehe Anhang M II.

Versuch ein bekanntes Trägheitsmoment M_1 zu (etwa 1 oder 2 wohlbegrenzte Massen in gut meßbarem Abstand von der Achse), ohne die Direktionskraft zu ändern, und mißt wieder die jetzt vergrößerte Schwingungsdauer T_1, für welche gilt $T_1 = 2\pi\sqrt{(M+M_1)/k'}$ (da Trägheitsmomente um dieselbe Achse sich einfach addieren, Gl. 181). Man hat in letzterer Gleichung und in der des ersten Versuchs, $T = 2\pi\sqrt{M/k'}$, zwei Gleichungen zur Berechnung der zwei Unbekannten M und k'.

Man sieht, daß man in dieser Weise auch Direktionskräfte experimentell ermitteln kann, was z. B. für Messungen elastischer, auch magnetischer Kräfte wichtig wurde.

188. 2. Einfaches Schwerependel. Man zeigt leicht, daß Gl. 185 auch das schon behandelte einfache Schwerependel (162) als Sonderfall umfaßt, wie es sein muß. Denn es ist für dieses Pendel, das nur eine einzige Masse m besitzt, die im Abstand der Pendellänge l von der Achse ist, $M = ml^2 = Pl^2/g$. Das Drehmoment ist $D = pl = P\varepsilon l$ (165), die Direktionskraft also $D/\varepsilon = Pl$. M und D/ε in Gl. 185 gesetzt geben in der Tat $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ in Übereinstimmung mit Gl. 167b.

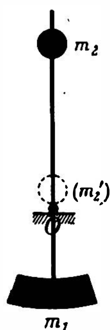


Abb. 39. Metronom-Pendel.

189. 3. Metronompendel (Abb. 39). Dies ist wohl der einfachste Fall eines zusammengesetzten Schwerependels, da es im wesentlichen nur zwei Massen besitzt, m_1 und m_2, die, an leichter Stange befestigt, gemeinsam um die Achse 0 schwingen können. m_2 ist an der Stange verschiebbar (von m_2 bis m'_2 in der Abb.); m_1 ist meist im Gehäuse des Metronoms versteckt. Nimmt man die obere Masse m_2 ab, so hat man ein einfaches Pendel, das wegen seiner Kürze sehr schnell schwingt. Setzt man m_2 auf, und zwar zunächst in seine tiefste Lage m'_2, so kann das kaum die Schwingungsdauer ändern; denn in solcher Nähe der Achse fügt m_2 weder zum Trägheitsmoment, noch zum Drehmoment etwas Wesentliches hinzu. Man hat also wieder die sehr schnellen Schwingungen. Schiebt man nun aber m_2 nach oben, so vergrößert das sehr das Trägheitsmoment des Ganzen (wegen r^2, 181). Zugleich wird das Drehmoment und damit die Direktionskraft verkleinert; denn der Schwerpunkt nähert sich von unten der Achse. Beide Änderungen wirken im selben Sinne (Gl. 185), die Schwingungsdauer sehr vergrößernd. Dies ist auch der Zweck des Metronoms, sowohl leicht veränderbare als auch außerdem besonders große Schwingungsdauern zu geben, letzteres ohne die großen Längen des einfachen Schwerependels.

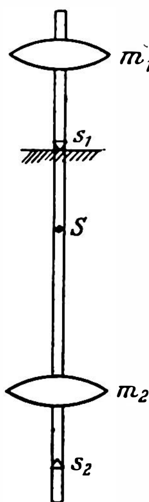


Abb. 40. Reversions-Pendel.

190. 4. Reversionspendel (Abb. 40). Dasselbe besitzt ebenfalls 2 Massen, m_1 und m_2 (meist linsenförmig, zur Verminderung des Luftwiderstandes); es besitzt aber auch 2 Achsen, s_1 und s_2 (in Gestalt von Schneiden), so daß es um jede derselben als Schwerependel schwingen kann. Das Besondere ist, daß die beiden Massen unsymmetrisch zu den beiden Achsen gelagert sind. Schwingt das Pendel um s_1 (wie es die Abbildung darstellt), so befindet sich eine der Massen oberhalb der Achse; schwingt es um s_2, so sind beide Massen unterhalb der Achse. Trotz dieser Unsymmetrie sollen bei einem richtigen Reversionspendel die beiden Schwingungsdauern einander gleich sein, was man durch geeignete Verstellung der Massen erreichen kann. Wendet man Gl. 185 auf diesen Fall an (wobei die Massen keineswegs in Punkten konzentriert anzunehmen sind), so findet man, daß die reduzierte Pendellänge (186) gleich dem Abstand der beiden Achsen voneinander ist.

Diese Eigenschaft des Reversionspendels macht es zu einem ausgezeichneten Mittel der Messung der Schwerebeschleunigung g. Denn der Abstand l der beiden Achsen (Schneiden) ist, ebenso wie die Schwingungsdauer T, sehr genauer Messung zugänglich, und die Anwendung der Gleichung $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ (167b) zur Berechnung von g aus den beiden Daten ist ganz einwandfrei, da die Rechnung nichts annimmt, was nicht genügend verwirklicht werden kann. Das einfache Fadenpendel hat dagegen den Nachteil, daß der Faden niemals gewichtslos und der Pendelkörper niemals ein Punkt sein kann (bzw. daß er nicht Parallelverschiebungen, sondern Drehungen um den Aufhängepunkt beim Schwingen ausführt), wie beim einfachen Pendel angenommen; wollte man bessere Annäherung an diese Annahmen erreichen, so müßte man Masse und Gewicht des Pendels so sehr verringern, daß unvermeidliche Reibungskräfte zum Überwiegen kämen, die wieder nicht der Rechnung entsprächen.

191. *Abhängigkeit der Schwerkraft von der geographischen Breite.* — Das Reversionspendel war auch sehr geeignet auf Reisen benutzt zu werden, wodurch man zum erstenmal eingehende Kenntnis über die Schwerebeschleunigung g an verschiedenen Stellen der Erdoberfläche erhielt. Es zeigte sich, daß g vom Äquator zu den Polen hin regelmäßig zunimmt[1]).

Da g nach dem Grundgesetz das Verhältnis von Gewicht zu Masse angibt (130), so bedeutet diese Verschiedenheit von g in verschiedenen Breiten, daß gleiche Massen in verschiedenen Breiten verschiedenes Gewicht haben, und zwar ist das Gewicht an den Polen größer als am Äquator. Der Unterschied ist nicht ganz gering; es beträgt g (in Meereshöhe) am Pol 9·832 m/sek^2 und am Äquator 9.781 m/sek^2. Dies bedeutet, daß dieselbe Masse, welche am Pol 983 gr wiegen würde, am Äquator nur 978 gr wiegt; das kgr wird also um mehr als 5 gr leichter. Daß dies für alle Massen gleichmäßig gilt, folgt aus der stets bestätigten Proportionalität von Gewicht und Masse (123, 172), deren Verhältnis eben die am selben Orte für alle Körper gleiche, von Ort zu Ort aber verschiedene Schwerebeschleunigung g ist.

Daß die Gewichtsunterschiede mit gewöhnlicher Waage nicht nachweisbar sein können ist selbstverständlich, da die Gewichtssätze ebenfalls davon betroffen sind. Wohl aber sind die nicht mit Schwerkraft messenden Federwaagen (255) zu diesem Nachweis tauglich.

Die beiden Ursachen, auf welche die Abhängigkeit der Schwere von der geographischen Breite (und Meereshöhe) vollständig zurückführbar sich zeigte, werden im folgenden bald anzugeben sein (203, 210).

192. *Absolutes Einheitssystem.* — Deutlich ist hierdurch ersichtlich, daß die gewöhnliche Krafteinheit, das Gramm, keine gute Einheit ist; sie ist ohne Angabe des Ortes, wo die Kraft, welche das cm^3 Wasser von 4^0 nach unten zieht, Einheit sein soll, unbestimmt. Dennoch bleiben wir bei Behandlung der Materie in der Hauptsache bei dem technischen oder irdischen Einheitssystem (68), dem diese Krafteinheit zugehört; denn fast alle zu messenden Kräfte ergeben sich unmittelbar leicht in gr, und die Unsicherheit ist nicht sehr groß (191), wenn der Ort der Messung nur auf der Erdoberfläche liegt (daher der Name „*irdisches* *Einheitssystem*), zumal durch Festsetzung eines bestimmten Ortes, wo das Grammgewicht genaue Einheit sein soll (geographische Breite und Meereshöhe), die Unsicherheit ganz entfernt werden kann.

Wesentlich unabhängiger von Zusatzbestimmungen ist das „*absolute* CGS-(cm-gr-sek-)*Einheitssystem*“, das besonders in der Physik des Äthers von Wichtigkeit ist (E 262). In diesem System ist das *Gramm* nicht Krafteinheit, sondern *Masseneinheit*; cm und sek behalten ihre Bedeutung. Die *Krafteinheit*, dyn genannt, wird hier mittels des Grundgesetzes (115) abgeleitet: sie ist diejenige Kraft, welche der Masse von 1 gr die Beschleunigung 1 cm/sek^2 erteilt. Das so festgesetzte dyn = gr · cm/sek^2 ist nahe gleich 1 Milligramm irdisch (genauer 1/g gr irdisch, vgl. 131).

Arbeitseinheit und damit auch *Energieeinheit* ist im CGS-System das Zentimeterdyn, welches *erg* genannt wird: 1 erg = 1 cm · 1 dyn.

[1]) Kapitän Kater, 1818. Die erste Beobachtung solcher Art wurde schon viel früher bei einer Reise mit einer Pendeluhr gemacht.

Der Gebrauch des CGS-Systems auch in der Physik der Materie ist naheliegend wenn es vorkommt, daß in gr gegebene (mit der Waage ermittelte) Massen verrechnet werden sollen. So erhält man z. B. kinetische Energie bei Berechnung nach $mv^2/2$ in erg, sobald man die Masse m in gr und die Geschwindigkeit v in cm/sek einsetzt.

Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft
(Ziehkraft und Fliehkraft).

193. Zentripetalkraft. — Mit dem Bisherigen ist die Drehbewegung keineswegs erledigt. Denn vor allem ist noch nicht einmal die Frage berührt, warum überhaupt die Teile eines in Drehung befindlichen Körpers Kreisbewegung um die gegebene Achse machen. Ihrer Trägheit allein überlassen, würden jedenfalls alle Massen ihre Geschwindigkeiten nach Größe und Richtung beibehalten und somit nicht in Kreisen herumlaufen. Man sieht, daß nach besonderen Kräften zu suchen ist, welche die den Kreisbahnen eigene andauernde Richtungsänderung der Geschwindigkeiten bewirken.

Es beschreibe eine Masse m (Abb. 41) die Kreisbahn a c mit dem Radius r um die Achse 0. Ihre Geschwindigkeit auf dem Kreise sei v, wonach ihre Winkelgeschwindigkeit (180) $\omega = v/r$ ist. Wäre die Masse von a aus allein nur ihrer Trägheit überlassen, so würde sie mit ihrer Geschwindigkeit v in deren augenblicklicher Richtung, d. i. in Richtung der Kreistangente weiterfahren; sie würde also in gewisser Zeit t von a nach b kommen, nicht nach c. Ist aber eine Kraft vorhanden, die, für sich allein wirkend, in der gleichen Zeit t die Masse von b nach c brächte, so findet sich die Masse nach der Zeit t trotz Trägheit auf der Kreisbahn. Eine solche, nach dem Kreismittelpunkt gerichtete Kraft, Zentripetalkraft (Ziehkraft) genannt, muß andauernd wirken, wenn die Masse dauernd auf der Kreisbahn bleiben soll; ohne Zentripetalkraft ist keine Kreisbewegung möglich.

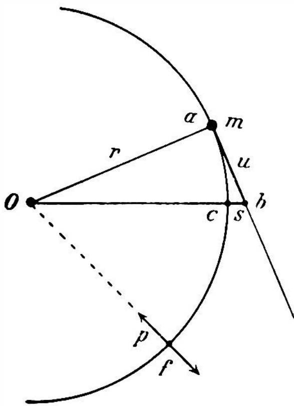


Abb. 41. Fliehkraft.

Auch für jede krummlinige Bewegung überhaupt gilt es, daß eine nach der hohlen Seite der Bahn, nach dem jeweiligen Krümmungsmittelpunkt gerichtete Kraft als Zentripetalkraft vorhanden sein muß; denn es ist jedes genügend kurze Stück einer beliebigen krummlinigen Bahn gleich einer Kreisbahn.

Hat man einen festen Körper, der um eine Achse sich dreht, z. B. ein Rad, so geben die Molekularkräfte des festen Körpers die Zentripetalkräfte her. Diese Kräfte werden beim Ingangsetzen der Drehung erst geweckt. Es treten nämlich infolge der eben betrachteten Wirkung der Trägheit, alle Teile von der Achse zu entfernen (statt nach c nach b zu bringen), radial gerichtete Dehnungen im Radkörper auf, und der gedehnte feste Körper sucht sich wieder zusammenzuziehen. Die Kraft, mit der dies geschieht, wächst — als elastische Kraft (255) — proportional der Dehnung, bis sie genau die für die Kreisbewegung erforderliche

Größe hat. Überwiegt bei einer gewissen Winkelgeschwindigkeit des Rades noch die Trägheitswirkung, so daß die Massenteile noch nach außen von der Kreisbahn abweichen, so erfolgt Vergrößerung der Dehnungen und damit aber auch der Zentripetalkraft; im anderen Falle, wenn die elastische Zentripetalkraft zu groß geworden sein sollte, so daß sie die Massen nach innen von der Kreisbahn abweichen läßt, sinken eben dadurch die Dehnungen, womit selbsttätig auch die Zentripetalkraft sinkt.

194. Zentrifugalkraft. — Man sieht, daß bei jeder krummlinigen Bahn ein Gegeneinanderwirken von Trägheit und Zentripetalkraft stattfindet. Die Trägheit allein würde die Massen nach außen abweichen lassen, die Zentripetalkraft allein nach innen. Bei der Kreisbahn müssen beide Wirkungen einander gleich sein, so daß die Trägheit ebenso weit nach außen führte als die Kraft in gleicher Zeit nach innen. Man kann auch sagen: daß Trägheit und Zentripetalkraft auf einer Kreisbahn einander das Gleichgewicht halten und dementsprechend daß die Trägheit hier ähnlich einer Kraft wirkt.

Dies wird oft sogar sehr augenscheinlich. Man steigere z. B. die Winkelgeschwindigkeit eines Schwungrades und damit auch die Trägheitswirkung immer mehr; die Folge wird sein, daß das Rad schließlich explosionsartig in Stücke zerfährt. Die vorbetrachteten Dehnungen im Rade sind dann so groß geworden, daß die Molekularkräfte versagen (die Elastizitätsgrenze überschritten ist, 253). Es ist augenscheinlich, daß hier die Trägheit wie eine Kraft gewirkt hat; sie hat den festen Körper zerrissen.

Es hat daher Huygens (zur Zeit noch nicht völliger Klärung der Bewegungslehre) den Namen Zentrifugalkraft (Fliehkraft) für die bei jeder krummlinigen Bewegung auftretende Trägheitswirkung eingeführt. Zentrifugalkraft und Zentripetalkraft (Fliehkraft und Ziehkraft) sind bei der Kreisbewegung einander an Größe gleich, in der Richtung aber entgegengesetzt, wie f und p in Abb. 41 es darstellen. Die Zentrifugalkraft ist stets senkrecht von der Drehachse weg gerichtet.

Noch zwei Beispiele mögen das Wirken von „Zentrifugalkraft" zeigen:

Man schwinge mit der Hand einen Stein am Faden im Kreise herum. Hier fühlt man, daß der Stein am Faden mit einer Kraft zieht — eben der Zentrifugalkraft —, der man mit der Muskelkraft der Hand am anderen Fadenende das Gleichgewicht halten muß um die Kreisbahn zu erzwingen.

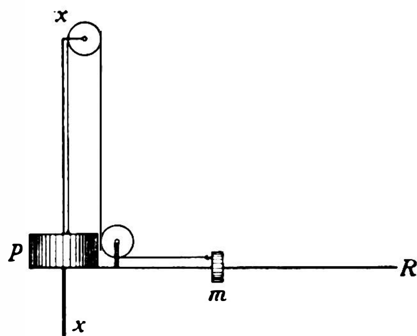


Abb. 42. Fliehkraft gegen Schwere arbeitend.

Eine Vorrichtung, die zeigt wie Zentrifugalkraft auch mit Schwerkraft sich ins Gleichgewicht setzen oder auch — beim Überwiegen — gegen die Schwerkraft Arbeit leisten kann, ist in Abb. 42 dargestellt. Man drehe die ganze Vorrichtung um die Achse x x. Es kann dann Zentrifugalkraft nur an der Masse m wirksam werden, da nur diese (an dem radial gerichteten Stab R gleitend) ihren Abstand von der Achse verändern kann; alle anderen Massen sind durch

genügende zentripetale Kräfte festgehalten. Steigert man nun die Winkelgeschwindigkeit der Vorrichtung genügend, so wird die Masse m mittels des an ihr befestigten Fadens und der 2 Rollen leicht das Gewicht P (senkrecht gleitend an der Achse) heben und dann dauernd oben halten. Die Masse m kann dabei z. B. 10 gr wiegen, das Gewicht P dagegen 1000 gr, was zeigt, daß die Zentrifugalkraft selbst kleiner Massen leicht hoch anwachsen kann, so daß das eigene Gewicht der kreisenden Masse daneben fast ganz verschwindet. Die Vorrichtung ist auch geeignet, Zentrifugalkräfte in gewöhnlicher Krafteinheit (gr oder kgr) unmittelbar auszumessen; man kann mit ihr auch die alsbald anzugebende Abhängigkeit der Größe der Zentrifugalkraft von den drei maßgebenden Größen — Masse, Bahnradius und Winkelgeschwindigkeit (196 u. f.) — experimentell prüfen. In Wirklichkeit mißt man dann mit der Vorrichtung die Zentripetalkräfte (193), die nötig sind, um die Masse m trotz ihrer radialen Gleitmöglichkeit auf der Kreisbahn zu erhalten.

195. Die Zentrifugalkraft bereits im Grundgesetz enthalten; sie ist nur kraftähnliche Wirkung von Trägheit, nicht Kraft nach Definition. — Man sieht aus den betrachteten Beispielsfällen, daß die Einführung des Begriffes „Zentrifugalkraft" bei Betrachtung von Kreisbewegung naturangemessen war. Alle Fälle von Kreisbewegung können mit Hilfe dieses Begriffes am leichtesten behandelt werden. Wird aber die Kreisbahn verlassen, so ist es aus mit der „Zentrifugalkraft"! Reißt der Faden des geschwungenen Steines, bricht das Schwungrad (194), so fliegen die Teile nicht radial, in Richtung der Zentrifugalkraft ab, sondern tangential, in Richtung der letzten Kreistangente mit der Geschwindigkeit, die sie zuletzt auf der Kreisbahn hatten, wie es der bloßen Trägheit entspricht. Es geschieht dies nach dem Grundgesetz, da keine Kraft mehr wirkt, die die vorhandene Geschwindigkeit abänderte. Das Grundgesetz bleibt unter allen Umständen gültig; auch die Zentrifugalkraft ist, als Trägheitswirkung, im Grundgesetz enthalten, aus dem wir auch ihre Größe ableiten werden (196). Geht man daher vom Grundgesetz aus und rechnet man — wie es dem Sinn des Grundgesetzes entspricht (117) — mit den vorhandenen Anfangsgeschwindigkeiten der Massen und den auf sie wirkenden Kräften, so dürfen unter diesen Kräften nicht auch noch Zentrifugal„kräfte" vorkommen (die auch gar keine Kräfte sind); denn es wäre sonst die Trägheit der Massen doppelt und also falsch berücksichtigt[1]). So, in richtiger Weise, sind wir beispielsweise bei der Betrachtung des schiefen Wurfes verfahren (141), wo trotz krummliniger Bahn nicht mit Zentrifugalkraft gerechnet wurde[2]).

[1]) Man sieht, daß man bei Einführung der Fliehkraft als einer besonderen „Trägheitskraft" immer Gefahr läuft, in die Irre zu gehen. Es liegt an der Beschränktheit des Menschengeistes, daß ihm die Einführung der Fliehkraft eine — mit Vorsicht richtig benutzbare — Erleichterung bietet. Nicht angebracht, weil überflüssig, ist es aber, „Trägheitskräfte", die keine Kräfte nach Definition (62) sind, allgemein einführen zu wollen, als wäre das Grundgesetz mit definitionsgemäßen Kräften nicht genügend. Man hat da allerlei Spitzfindigkeiten um die Drehbewegung entwickelt, die keine grundsätzliche Naturerkenntnis bieten, sondern solche nur verdunkeln. Man stellt den Beobachter auf Drehscheiben und läßt ihn die Muskeln statt des Verstandes zu Rate ziehen, damit er „Kraft" nenne, was nur Trägheitswirkung ist. Dies geht gegen Aufrechterhaltung klaren Denkens, das nur mit fest definierten Begriffen stattfinden kann. (S. dazu 115).

[2]) Ebenso hat Newton die Himmelsbewegungen, obgleich sie kreisend sind, ohne „Zentrifugalkraft" berechnet, wobei ihm allerdings Huygens' vorangegangene Untersuchungen von Nutzen waren.

Die Zentrifugalkraft kann definiert werden als eine bei Kreisbewegung auftretende, teilweise kraftähnliche Wirkung der Trägheit. Eine wirkliche Kraft ist sie nicht; sie genügt nicht der Definition der Kräfte (62); sie ist nicht Ursache von Beschleunigung. Sie besitzt nur einen Teil von Krafteigenschaften, nämlich die Zusammensetzbarkeit mit beliebigen Kräften nach dem Parallelogrammsatz (77). Dieses ist dadurch bedingt, daß der Zentrifugalkraft bestimmte Wege in gegebener Zeit entsprechen (194, Weg cb in Abb. 41), wie wirklichen Kräften, und daß verschiedenen Ursachen entsprechende gleichzeitige Wege sich geometrisch addieren (45). Wir werden hiervon mehrfach Gebrauch machen (197, 198, 203, 223).

Das Arbeiten der Zentrifugalkraft gegen andere Kräfte, wie z. B. in der Vorrichtung Abb. 42 gegen die Schwere, ist nur dasselbe Arbeiten von Trägheit gegen Kraft, das an jedem nach oben geworfenen Körper ersichtlich ist und das allein nach dem Grundgesetz oder auch nach dem Energiegesetz richtig berechnet wird. Solches Arbeiten von Trägheit gegen Kräfte ist die Umkehrung des schon eingehend behandelten Falles des Arbeitens von Kräften gegen Trägheit (146).

196. Größe der Zentrifugalkraft. — Es kommt zur Berechnung der Zentrifugalkraft aus dem Grundgesetz nur darauf an, die Zentripetalkraft zu berechnen, welche die gegebene Masse m bei der gegebenen Winkelgeschwindigkeit ω auf der Kreisbahn mit dem Radius r verbleiben läßt; dieser Kraft ist die Zentrifugalkraft Z entgegengesetzt gleich (194).

Es muß (193) in der Zeit t, welche durch Trägheit allein den Weg $a\,b = u$ ergäbe (Abb. 41), durch Z der Weg $b\,c = s$ bewirkt werden. Es muß daher sein (Gl. 134b und 115) $s = bt^2/2 = (Z/m)t^2/2$, also $Z = 2ms/t^2$, was bei $t = 0$ streng richtig wird, weil in genügend kurzen Zeiten jede unter Krafteinfluß stehende Bewegung als gleichförmig beschleunigt gelten kann, wie es die benutzte Gl. 134b voraussetzt. Außerdem ist $u = \omega r t$.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $0\,a\,b$ ist aber $s = \sqrt{r^2 + u^2} - r = r\sqrt{1+\omega^2 t^2} - r$. Da t klein werden soll, entwickelt man die Wurzel in eine Reihe, wonach wird $s = \frac{1}{2} r\omega^2 t^2 + \ldots$, also $Z = 2ms/t^2 = mr\omega^2 + \ldots$ Läßt man nun $t = 0$ werden, so fallen alle nicht hinzugeschriebenen Glieder der Reihe weg, und es bleibt für die Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft genau

$$Z = mr\omega^2 \qquad 196a)$$

oder bei Einführung der Lineargeschwindigkeit $v = \omega r$

$$Z = \frac{mv^2}{r}\,. \qquad 196b)$$

Es seien diese Abhängigkeiten der Zentrifugalkraft Z von m, r und ω bzw. v im folgenden gesondert überlegt und mit der Erfahrung verglichen (197—200).

197. Die Proportionalität mit der Masse m ist von vornherein verständlich, da die Zentrifugalkraft Wirkung der durch die Masse bemessenen Trägheit ist. Man kann aber auch einen besonderen Versuch anstellen, der diese Proportionalität zeigt (Abb. 43), indem man die Zentrifugalkraft mit der Schwerkraft vergleicht, deren Massenproportionalität durch viel Erfahrung schon fest-

steht (123, 172). Die bei a und b an Gelenken aufgehängten, sehr verschiedenen schweren Körper P und K (Blei und Kork z. B.) rotieren mit gemeinsamer Winkelgeschwindigkeit um die Achse x x. Sie stellen sich in gleiche Schiefe und dadurch auch auf gleichen Bahnradius ein, was mittels der in der Abbildung ersichtlichen Kräfteparallelogramme, die wegen der gleichen Schiefe einander ähnlich sein müssen, beweist, daß Zentrifugalkraft und Schwerkraft einander proportional sind, wonach auch die erstere massenproportional sein muß[1]).

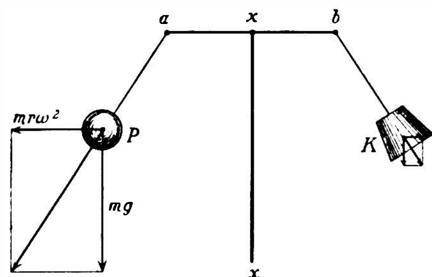


Abb. 43. Massenproportionalität der Fliehkraft.

198. Die Proportionalität der Zentrifugalkraft Z mit dem Bahnradius r bei gegebener Winkelgeschwindigkeit ω (Gl. 196a) kann durch die Vorrichtung Abb. 44 der Erfahrungsprüfung unterzogen werden. Die beiden Metallkugeln m und M können mittels zentraler Durchbohrungen an der Stange a b gleiten; sie sind durch einen starken Faden miteinander verbunden, und das Ganze kann um x x gedreht werden. Die Kugeln seien vorher gewogen; ihre Gewichte und also auch ihre Massen verhalten sich wie 1 : 4. Man geht nun von der schon gesicherten Massenproportionalität der Fliehkraft aus. Besteht Proportionalität auch mit den Bahnradien, so müssen die beiden Kugeln bei der gleichen Winkelgeschwindigkeit gleiche Fliehkräfte ergeben, wenn ihre Abstände von der Achse wie 4 : 1 sich verhalten (wie in der Abbildung gezeichnet). Die Gleichheit der beiden Fliehkräfte (bei entgegengesetzter Richtung, entsprechend den entgegengesetzten Richtungen der beiden Radien) wird durch möglichst schnelle Drehung des Ganzen geprüft; die Kugeln bleiben dann an ihren Stellen, da die beiden Kräfte mittels des Fadens die Resultierende Null ergeben. Wählt man andere Lagen des Kugelpaares, so fliegen sie beide zusammen längs der Stange a b von der Achse weg und zwar geht jedesmal diejenige Kugel voran, die den zu großen Bahnradius hatte.

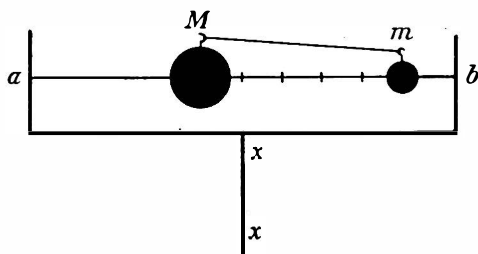


Abb. 44. Fliehkraft dem Radius proportional.

Eine andere hierher gehörige Beobachtung kann an dem teilweise mit Flüssigkeit gefüllten Glase a b c d gemacht werden (Abb. 45), das um die Achse x x gedreht wird. Hat die ganze Flüssigkeit einheitliche Winkelgeschwindigkeit angenommen, so ist ihre Oberfläche ein Paraboloid geworden, dessen Achse mit der Drehachse übereinstimmt und dessen Scheitel zutiefst liegt, wie es die Abbildung zeigt. Diese Oberflächenform berechnet man leicht mittels des in der Abbildung gezeichneten Kräfteparallelogramms, dessen Komponenten wieder dieselben sind, wie in Abb. 43. Hinzuzunehmen ist nur die Kenntnis (296), daß eine Flüssigkeitsoberfläche im

[1]) Sieht man die Massenproportionalität der Fliehkraft von vornherein als gesichert an — weil diese Kraft unzweifelhaft Trägheitswirkung ist —, so bildet der Ausfall des Versuches einen neuen Beweis für die Massenproportionalität der Schwerkraft. In diesem Sinne ist der Versuch mit großer Verfeinerung unter Benutzung der Erddrehung durchgeführt worden (204).

Gleichgewicht stets senkrecht steht zur Resultierenden der wirkenden Kräfte, wobei es — wie leicht einzusehen — nur auf die Abhängigkeit der Zentrifugalkraft von r ankommt, die somit durch das Eintreten der Paraboloidform der Oberfläche bestätigt wird.

199. Ist nicht die Winkelgeschwindigkeit ω vorgegeben und unverändert gehalten, wie in den bisher betrachteten Fällen, sondern ist es die Lineargeschwindigkeit v, so kommt Gl. 196 b in Betracht, welche zeigt, daß dann die Zentrifugalkraft verkehrt proportional dem Bahnradius r sich verhält. Dieser Fall liegt beispielsweise bei einem Eisenbahnzug an Gleiskrümmungen vor. Je kleiner der Krümmungsradius, desto größer wird hier die Fliehkraft, desto mehr muß also gegen ihre, die Fahrzeuge vom Krümmungsmittelpunkt abdrängende Wirkung vorgesorgt sein. Dies geschieht dadurch, daß das vom Krümmungsmittelpunkt abliegende Gleis um so viel höher gelegt wird, daß die Resultierende von Schwerkraft und Fliehkraft (vgl. Abb. 43), auf welche allein es ankommt, die Fahrzeuge auch an den gekrümmten Bahnstellen senkrecht ins Gleis drückt. Es greifen beide genannten Kräfte am Schwerpunkt des Fahrzeuges an (da die Einzelfliehkräfte der verschiedenen Teile — bei nicht allzu kleinem Bahnradius — einander parallel und überall den Schwerkräften proportional sind), und man berechnet daher leicht für die nötige Schiefe α der Gleisfläche $\operatorname{tg}\alpha = (mv^2/r)/mg = v^2/rg$. Es gilt also die gleiche Schiefe für schwere wie für leichte Fahrzeuge; jedoch kommt es auf die Geschwindigkeit v an und zwar sehr, da sie im Quadrat maßgebend ist.

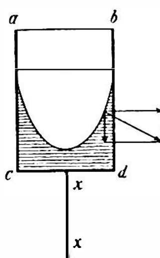


Abb. 45. Gedrehte Flüssigkeit.

200. Die quadratische Abhängigkeit der Fliehkraft von der Geschwindigkeit, und zwar gleichgültig ob man Winkelgeschwindigkeit oder Lineargeschwindigkeit betrachtet (Gl. 196a und b), wäre als einfachste Möglichkeit schon daraus einzusehen, daß Rechts- und Links-Drehung (Umkehrung des Vorzeichens von ω oder v) gleiche Wirkung geben müssen. Prüfen kann man die Abhängigkeit der Fliehkraft von ω gut mit dem Apparat Abb. 42 (vgl. 194), der alle wünschenswerten Variationen gestattet und übrigens auch zur Prüfung der Abhängigkeit von m und r dienen kann.

201. Alle hier gedachten Erfahrungsprüfungen der Gl. 196a und b für die Zieh- und Fliehkraft sind — und waren einst — auch Prüfungen für Galileis und Newtons Grundgesetz. Die Bewährung desselben für alle irdischen Bewegungen ist damit wiederholt gut gesichert. Der nächste Abschnitt (205 u. f.) wird zeigen, daß diese Bewährung auch für die Bewegungen im Himmelsraum gilt.

202. Bei Anwendungen der Fliehkraft, wie in den Zentrifugen, Zentrifugalpumpen und -ventilatoren, kommt es auf große Zentrifugalkräfte an, und dieselben können wegen der quadratischen Abhängigkeit am besten durch große Drehgeschwindigkeiten erreicht werden. Alle diese Vorrichtungen laufen dementsprechend schnell. Bei den Zentrifugal-Ventilatoren und -Pumpen bringt ein Schaufelrad Luft oder Flüssigkeit in Drehung und es erfolgt Abströmen am Umfang eines umgebenden Gehäuses, Zuströmen an der Achse. Dasselbe findet sich bei Wirbelstürmen in der freien Atmosphäre (vgl. 397 u. f.). Die Achse der Drehbewegung der Luft steht hier senkrecht zum Erdboden, und es können mit der Luft auch Staub, Wasser und selbst schwere Gegenstände in die Achse hinein hochgesogen werden (Windhosen, Wasserhosen). Die Zentrifugen dienen schneller Sonderung der Bestandteile von (innerlich genügend beweglichen) Gemischen. Schwerere Bestandteile werden immer nach außen hin gedrängt, weil sie immer auch die größere Masse haben. Z. B. kann Milch leicht in Molke und Sahne zerlegt, ein Niederschlag in trüber Flüssigkeit schnell abgesondert werden; Mutterlauge kann aus den Poren auskristallisierter Stoffe, Wasser aus den Poren von Wäsche bis zu fast völliger Trockenheit herausgeschleudert werden.

Es ist zu bemerken, daß hierbei die Zentrifugalkraft nichts vollbringen kann, was einer gehörig vermehrten Schwerkraft nicht auch möglich wäre, da beide massenproportional sind. Gl. 196a zeigt, daß das Verhältnis von Zentrifugalkraft zum Gewicht jedes beliebigen Körpers stets $r\omega^2 : g$ ist; es wird aber bei $r = 0{\cdot}5$ m und 100 Umläufen in der Sek. ($\omega = 200\,\pi$/sek)

$r\omega^2 = 200000$ m/sek², während g nur 10 m/sek² ist, so daß die Schwere 20000mal übertroffen wird. Mit 2000 und mehr Umläufen in der Sek. hat man bei kleineren Drehkörpern, die nicht so leicht explodieren, bis zu 10^6 g erreicht (s. dazu Anhang M III).

203. Fliehkräfte der rotierenden Himmelskörper. — Die Wirkung der Fliehkraft auf der täglich sich drehenden Erde ist wegen der geringen Winkelgeschwindigkeit selbst am Äquator nur klein ($r\omega^2 = 0{\cdot}034$ m/sek²) gegenüber der Schwerkraft, mit der sie sich zu einer Resultierenden zusammensetzt. An den Polen ist sie Null; hier wirkt die Schwere allein.

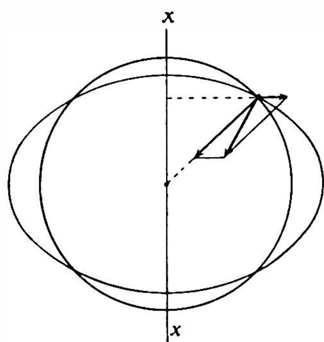


Abb. 46. Erdabplattung.

In mittleren Breiten hat die Resultierende, welche die tatsächliche Lotlinie ist, eine kleine Abweichung von der Richtung zum Erdmittelpunkt (s. Abb. 46). Dies hat auch die Folge, daß die zu dieser Resultierenden überall senkrecht stehende (296) Meeresoberfläche (und ebenso auch die feste Erde) keine Kugelgestalt haben kann, sondern ellipsoidisch abgeflacht sein muß, was mühevolle langjährige Breitengradmessungen endlich auch als der Wirklichkeit entsprechend gezeigt haben (1680—1750). Huygens, der das Größengesetz der Zentripetal- und Zentrifugalkraft gefunden hatte, und Newton schlossen schon vorher auf Abplattung der Erde.

Am Äquator ist die Fliehkraft der Schwerkraft genau entgegengerichtet, sie subtrahiert sich hier mit ihrem ganzen Betrage von dieser. Hiermit ist auch die mit den Pendeln beobachtete Abnahme der Schwere vom Pol zum Äquator (191) zu einem Teile erklärt. Die zweite, noch hinzu kommende Ursache dieser Abnahme ergibt sich später (210).

Jupiter mit 11 mal so großem Radius als die Erde und weniger als nur 10 Stunden Umlaufszeit ist viel stärker abgeplattet als die Erde.

Noch viel stärkere Abplattungen findet man oft bei den sehr entfernten, teils aus leuchtenden Gasmassen bestehenden Himmelsgebilden, den „Nebelflecken", so beim Nebel im Sextanten (Abb. 54), in der Jungfrau, beim Andromedanebel, die fast flache, von der Kante gesehene Scheiben darstellen (vgl. 233). Die Umlaufszeiten sind hier, soweit sie (durch Dopplers Prinzip, A 92) ermittelbar waren, außerordentlich groß (Jahrtausende), was mit der ungeheuren räumlichen Ausdehnung dieser Gebilde zusammenhängt.

204. Verfeinerte Prüfung der Massenproportionalität der Schwerkraft. — Da die Lotlinie in mittleren Breiten stets resultierende Parallelogrammdiagonale aus Schwerkraft und Fliehkraft ist, wie es die Abb. 46 zeigt, so ist ersichtlich, daß Lote aus verschiedenen Stoffen verschiedene Richtungen annehmen müßten, wenn Schwerkraft und Trägheit, welche letztere die Fliehkraft bestimmt, nicht einander proportional wären. Dies kann zu einer Probe auf diese Proportionalität benutzt werden, die sogar viel empfindlicher ist als die der Pendel (172), weil kleinste Winkelabweichungen leichter mit großer Sicherheit feststellbar sind als Unterschiede in Schwingungsdauern von Pendeln gemessener Längen. Nach diesem Grundgedanken (vgl. Note zu 197 und Abb. 43) ist bei paarweiser Vergleichung verschiedener Stoffe festgestellt, daß das Gewicht bis auf mindestens 1 Zwanzigmillionstel seiner Größe proportional der Masse ist. Wichtig ist für einen späteren, sehr wesentlichen Schluß, daß dies auch für radioaktive Stoffe gilt (E 582).

Gravitation.

205. Himmelsmechanik. Keplers Gesetze. Gravitationsgesetz. — Bewegungen in Kreisbahnen oder ungefähren Kreisbahnen kommen in größtem Maßstab allenthalben im Himmelsraum vor. Daß der Mond um die Erde kreise war von altersher nicht bezweifelt. Kopernikus zeigte, daß — wenn der Lauf der Gestirne am Himmelszelt überhaupt einfach begreiflich sein soll — die Erde samt dem um sie kreisenden Mond die Sonne umkreise, und daß in ebensolchen, nur verschieden großen Bahnen auch die anderen Planeten — Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn waren die damals bekannten — um die Sonne laufen.

Tycho Brahe widmete darauf die Hauptarbeit seines Lebens der möglichst genauen Ausmessung der Planetenörter am Himmel, die er Nacht für Nacht beobachtete und in Tabellen eintrug, um eine über Kopernikus — dem fast nur ältere Himmelsbeobachtungen zur Verfügung standen — hinausgehende, genauere Ermittelung der wirklichen Planetenbahnen zu ermöglichen.

Kepler bearbeitete dann die von Tycho Brahe hinterlassenen Tabellen. Er fand, daß Kreisbahnen der Planeten, mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen, nicht der Wirklichkeit entsprechen, sondern daß man andere Bewegungsarten um die Sonne annehmen müsse, wofür er folgende drei Gesetze ermittelte:

1. Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

2. Der von der Sonne zum Planeten gezogene Leitstrahl beschreibt in gleichen Zeiten gleiche Flächen (vgl. Abb. 47).

3. Die Quadrate der Umlaufszeiten verschiedener Planeten verhalten sich wie die Kuben von deren mittleren Abständen von der Sonne.

Diese Gesetze entsprachen so vollständig Tychos Beobachtungen, und sie sind so einfach im Vergleich zum verwickelten beobachtbaren Lauf der Planeten, wie er von der ebenfalls nach diesen Gesetzen bewegten Erde aus gesehen wird, daß nun Zweifel an damit erlangter Wirklichkeitskenntnis verscheucht sein konnten.

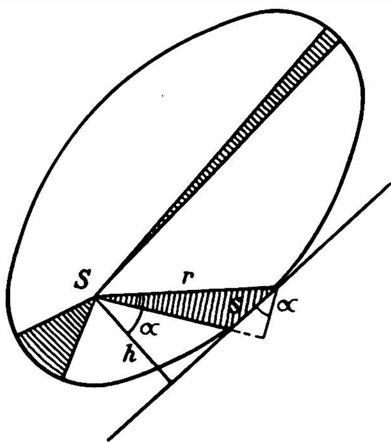


Abb. 47. Planetenbewegung (Flächensatz).

Dazu kam, daß zur selben Zeit Galilei mit dem Fernrohr — das er als Erster forschend gegen den Himmel richtete — vier Monde des Jupiter entdeckte, die ganz offensichtlich ebenso um diesen Planeten laufend sich zeigten, wie dieser selbst und die anderen Planeten um die Sonne laufen sollten. Hier sah Galilei unmittelbar eine so zusammengesetzte Bewegung, wie die des Erdmondes um die Erde und mit dieser gleichzeitig um die Sonne, an Jupiters Monden tatsächlich im Himmelsraum vorhanden. Endlich hatte dann Galilei mit seinem Grundgesetz die Bewegungslehre der irdischen Körper geschaffen

und Huygens schon sie auf Kreisbewegungen angewandt, mit Zentripetalkraft und Fliehkraft.

Da war die Zeit gekommen, diese Erkenntnisse über irdische Bewegungen auf die nun festgestellten Bewegungen der Himmelskörper anzuwenden, um zu sehen, welche Gesetze im Himmelsraum gälten. Diesen Gedanken nicht nur erfaßt, sondern in einer Weise und in einem Umfang durchgeführt zu haben, daß es immer nur wieder endloses Staunen erwecken muß, dies war Isaak Newtons Werk (1686)[1]). Er zeigt, daß für die Bewegungen im Himmelsraum dieselben Gesetze gelten, wie auf Erden, nämlich vor allem Galileis Beschleunigungsgesetz und das in demselben enthaltene Trägheitsgesetz, die dabei auch zuerst in den festen Formen mit fest bestimmten Begriffen erschienen, wie wir sie von Anfang eingeführt haben (115, 116). Von den Kräften aber, unter deren Einfluß die Bewegungen der Himmelskörper nach diesen Gesetzen zustande kommen, zeigte er, daß sie alle einem besonderen, einfachen Gesetz folgen: Es sind gegenseitige Anziehungen je zweier Massen der Welt vorhanden — Kräfte, die überall den Abstand der Massen zu verkürzen suchen —, und die Größe der Kraft ist jedesmal gegeben durch das Produkt der beiden Massen dividiert durch das Quadrat ihres Abstandes voneinander (vgl. Abb. 48). Diese nach einem so einfachen Gesetz wirkende Kraft hat den Namen Gravitation erhalten. Als ein Sonderfall des Allbestehens dieser Kraftart zeigt sich die irdische Schwere als Anziehung, welche die gesamte Erdmasse auf jede Einzelmasse an ihrer Oberfläche ausübt.

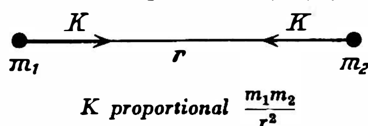


Abb. 48. Gravitation.

Alle Materie, irdisch oder himmlisch, zeigte sich somit denselben Bewegungsgesetzen und der allvorhandenen Kraft der Gravitation unterworfen. Eine gewaltige, neue Einsicht ging da auf: Die gesamte sichtbare Welt erschien nun zum erstenmal als ein einheitliches großes Ganzes; Himmel und Erde hörten auf, Gegensätze zueinander zu sein. Es ist dies der größte Erkenntnis-Zuwachs über die Beschaffenheit der Welt, der jemals durch einen Einzelnen gebracht worden ist.

206. Erde und Mond. — Von den Wegen, auf welchen Newton zu diesen Erkenntnissen gekommen war und die ihm auch die Beweise für die Richtigkeit lieferten, seien zunächst die am besten zugänglichen genannt. Die große Fülle der Folgerungen die Newton weiter zog, deren auch später immer noch viele neue, zutreffende hinzukamen, haben die Beweise ins Ungezählte vermehrt.

Das Nächstliegende war es jedenfalls, die Bahn des Mondes um die Erde zu betrachten und anzunehmen, daß eine nach Huygens leicht berechenbare, von der Erde ausgeübte Zentripetalkraft ihn im Kreise herumlenke. Die Kraft müßte dann von der Größe $mr\omega^2$ sein (Gl. 196a), also proportional der Masse m des Mondes. Dividiert man die Kraft durch diese Masse m des Bewegten, so erhält man nach dem Grundgesetz (Gl. 115) die Beschleunigung $b = r\omega^2$, welche der Mond gegen die Erde hin erhält und welche für sich allein merkbar werden

[1]) „Priucipia mathematica philosophiae naturalis" („Maßgerechte Grundlagen des Wissens von der Natur").

müßte, wenn er in seiner Bahn zur Ruhe gebracht und dann von der Ruhe aus losgelassen würde. Er würde dann mit dieser Beschleunigung gegen die Erde fallen müssen. Diese Beschleunigung $b = r\omega^2$ ist aber unmittelbar berechenbar, da r, der Abstand des Mondes vom Erdmittelpunkt, und ω ($= 2\pi/T$, wo T ein Monat ist) bekannt sind. Die einfache Ausrechnung ergibt $b = 0{\cdot}0027 \mathrm{m/sek}^2$. Mit dieser Beschleunigung würde auch jeder andere, an Stelle des Mondes losgelassene Körper gegen die Erde fallen, wenn die treibende Kraft massenproportional ist wie beim Monde. Dies ist eine sehr kleine Beschleunigung; der Fallweg $s = bt^2/2$ wäre danach in der ersten Sekunde nur 1·35 mm. Vergleicht man diese Beschleunigung b mit der der Schwerkraft auf der Erdoberfläche, $g = 9{\cdot}8 \mathrm{m/sek}^2$ (174), so findet man letztere rund 3600mal so groß als die erstere[1]). Die Mondentfernung r beträgt aber rund 60 Erdradien, und $3600 = 60^2$. Stellt man also die Frage, was aus der Erdschwere würde, wenn man von der Erde sich entfernte bis zum Mond, so kann man antworten: Die Erdschwere nimmt mit zunehmender Entfernung vom Erdmittelpunkt ab wie das verkehrte Quadrat dieser Entfernung; sie ist im Mondabstand nicht verschwunden, nur nach diesem Entfernungsgesetz sehr abgeschwächt und ist dort gerade groß genug um den Mond in seiner Bahn festzuhalten. Man hat dann allein nur aus der Annahme, daß der Mond der massenproportionalen Schwerkraft unterworfen ist, wie die Körper der Erde, die Mondbewegung erklärt. Eine Himmelsbewegung ist auf Wirkung einer auf der Erde bekannten Kraft nach dem Grundgesetz zurückgeführt; zugleich erscheint die irdische Schwere nun nicht mehr als Eigenschaft nur der Körper auf der Erdoberfläche allein, und sie hat außerdem jenes einfache Entfernungsgesetz erhalten, das sie auf beliebige Abstände umzurechnen erlaubt. Eben in dieser verallgemeinerten Auffassung ist die Schwerkraft Gravitation zu nennen.

207. Planetenbewegungen. — Ein Hauptprüfmittel für die Richtigkeit dieser weitgehenden Vorstellungen bildeten sogleich die Planetenbewegungen nach Keplers Gesetzen (205). Hier mußte die Zentripetalkraft von der Sonne ausgehen, und Newton hatte sogar schon früh die zugehörigen Rechnungen ausgeführt, welche ihm zeigten, daß nur eine dem verkehrten Entfernungsquadrat proportionale Kraft die Ellipsenbahnen des 1. Gesetzes ergeben kann (allgemeiner: Kegelschnittbahnen, nämlich Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel, im Grenzfall eine nach der Sonne hin gerichtete gerade Linie). Auch das 2. Gesetz widerspricht dem nicht; es verlangt — was schon Kepler einsah — jedenfalls eine stets nach der Sonne hin gerichtete Kraft (vgl. 232). Ganz besonders beweisend für das Entfernungsquadratgesetz dieser, alle Planeten bewegenden Kraft ist aber das 3. Gesetz, welches die in so sehr verschiedenen Entfernungen von der Sonne kreisenden Planeten miteinander vergleicht. Es ist nach diesem Gesetz für zwei beliebige Planeten mit den Umlaufszeiten T_1, T_2, den Sonnenabständen r_1, r_2 und den Winkelgeschwindigkeiten ω_1, ω_2 $T_1^2 : T_2^2 = rr_1^3 : r_2^3$ oder,

[1]) Es wäre unangebracht, hier genauer als mit 2 Zahlenstellen vorzugehen. Wollte man genauer sein, so wäre mit der Bewegung um den gemeinsamen Schwerpunkt von Mond und Erde zu rechnen (223), sowie mit dem hinzukommenden Einfluß der Sonne (und der anderen Planeten, 211), was von Newton im Verlaufe seiner Untersuchung alles selbst festgestellt wurde. Es ergeben sich aber die grundlegenden Erkenntnisse immer zuerst im Groben; die Verfeinerungen folgen nach.

da $\omega = 2\pi/T$, $\omega_1^2 : \omega_2^2 = r_2^3 : r_1^3$; also gilt für die beiden Zentripetalkräfte $mr\omega^2$ das Verhältnis $m_1 r_1 \omega_1^2 : m_2 r_2 \omega_2^2 = m_1 r_1 r_2^3 : m_2 r_2 r_1^3 = (m_1/r_1^2) : (m_2/r_2^2)$.

Die Kräfte sind also nach Keplers 3. Gesetz in der Tat verkehrt proportional den Abstandsquadraten von der Sonne, außerdem proportional den Massen der Planeten. Letzteres ist schon ohne weiteres aus dem Grundgesetz zu sehen (Gl. 115); denn nur bei massenproportionalen Kräften fällt die Masse aus der Beschleunigung heraus, ist sie also ohne Einfluß auf die Bewegungen. Schon die Tatsache, daß Masse und Stoffart der Planeten in Keplers 3. Gesetz gar nicht vorkommen, beweist also nach dem Grundgesetz, daß die wirkenden Kräfte einfach massenproportional und unabhängig vom Stoff sein müssen. Keplers 3. Gesetz beweist somit für die Gravitation dasselbe, was Galileis 2. Pendelgesetz für die irdische Schwere zeigte (171).

208. Massen der umkreisten Himmelskörper. — Der soeben bemerkten Einflußlosigkeit der Massen der kreisenden Körper beim Wirken massenproportionaler Kräfte steht ein sehr großer Einfluß des jeweils umkreisten Zentralkörpers gegenüber. Die Sonne schwingt die Planeten sehr viel schneller herum als — mit Berücksichtigung der Abstände — Jupiter seine Monde, und dieser wieder seine Monde schneller als die Erde ihren Mond. Daß dies der großen Masse der Sonne, der kleineren des Jupiter und der noch kleineren der Erde zuzuschreiben ist, indem die Kraft der Gravitation nicht nur der Masse des angezogenen Körpers sondern auch der des anziehenden Zentralkörpers proportional anzunehmen ist, dies folgt aus einem besonderen, dritten Bewegungsgesetz, das Newton irdischer Erfahrung entnimmt, so wie auch sein erstes und zweites Bewegungsgesetz irdischen Erfahrungen entnommen waren: Es ist das Gesetz von der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft. Nach demselben müssen beide Körper, z. B. Erde und Mond, von der gleichen Kraft ergriffen sein, nur mit entgegengesetzter Richtung, wie es Abb. 48 darstellt. Ist aber jeder der beiden Körper gleichzeitig sowohl anziehend als auch angezogen, so müssen in der Tat die Massen Beider gleichmäßig bestimmend sein für die Größe der auf Beide wirkenden Kraft. Dies hat sich durch Erkenntnis des allgemeinen Gesetzes der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft (209) bestätigt, womit das vollständige Gravitationsgesetz — wie es oben schon angeführt wurde (205) — gegeben ist.

Man bemerkt, daß hiermit auch die Berechnung der Massen der Sonne, des Jupiter, Saturn (und was sonst noch Planeten oder Monde hat) im Verhältnis zur Masse der Erde gesichert ist. Es ist danach beispielsweise die Masse der Sonne gleich 333000 Erdmassen, die des Jupiter 318 Erdmassen; alle anderen Planeten haben weniger Massen.

Da auch die Radien dieser Himmelskörper bekannt sind (aus von der Erde gesehener Winkelgröße und Abstand), kann nach dem Gravitationsgesetz leicht auch die Anziehung berechnet werden, welche jeder dieser Himmelskörper auf gegebene Körper an seiner eigenen Oberfläche ausübt, d. i. die Größe der Schwerkraft auf ihnen im Vergleich zur irdischen Schwere. Rechnet man — was zutrifft (210) — die Gravitationskräfte jeweils vom Mittelpunkt des betreffenden Himmelskörpers ausgehend, so findet man beispielsweise, daß ein irdisches kgr (1 Liter Wasser) auf der Sonnenoberfläche 28 kgr, auf Jupiters Oberfläche 2·5 kgr wiegen würde.

209. Newtons drittes Bewegungsgesetz: Gleichheit von Kraft und Gegenkraft. — Wir schalten hier eine allgemeine Erläuterung dieses soeben schon benutzten und auch früher (116) schon erwähnten Gesetzes ein, um dann zur Gravitation zurückzukehren.

Das Gesetz stellt eine Eigenschaft aller Kräfte beliebigen Ursprunges fest; es sagt aus, daß alle Kräfte paarweise vorhanden sind: Es gehört zu jeder Kraft in der Welt eine ihr an Größe gleiche, in Richtung aber entgegengesetzte Kraft — „Gegenkraft" genannt —, die irgendwo sonst in der gleichen geraden Linie angreift.

Die Erfahrungen, welche Newton für das Gesetz anführt, sind alltäglich. Zieht ein Pferd am Seile eine Last, so zieht die Last — mittels der überall gleichen Spannung des Seiles — mit gleicher Kraft am Pferde zurück. Es ist das Seil, das hier an seinen beiden Enden Kraft und Gegenkraft hergibt; das Seil zieht die Last voran und zieht das Pferd zurück. Man kann auch weiter bemerken, daß das Pferd mit seinen Hufen auf den Erdboden sich stützen muß um die Kraft auf Seil und Last auszuüben, und daß also das Pferd die Erde zurücktreibt, während es sich samt Seil und Last vorantreibt. Man sieht auch hier wieder Kraft mit Gegenkraft verbunden. Die Angriffspunkte beider Kräfte sind im letzteren Falle dicht benachbart, dort wo der Huf des Pferdes an die Unebenheit des Erdbodens gepreßt ist; Huf und Erdboden wirken mit entgegengesetzt gleichen Kräften aufeinander.

Die Betrachtung vieler Fälle zeigt, daß oft die Angriffspunkte von Kraft und Gegenkraft als benachbart angegeben werden können, wie im zuletzt erwähnten Falle, während in anderen Fällen große Abstände zwischen den beiden Angriffspunkten vorhanden sein können, wie beim gespannten Seile, das Kraft und Gegenkraft an seinen beiden Enden ausübt. Untersucht man Fälle der letzteren Art näher, so findet man oft, daß auch im Zwischenraum der beiden Angriffspunkte Kräfte mitwirken; so am gespannten Seile, wo jeder Teil desselben an seinen Enden ebenso Kraft und Gegenkraft ausübt wie das ganze Seil. Die Verlegung der Angriffspunkte an die Enden des Seils ist dann eine oft zulässige Vereinfachung mit Weglassung nicht immer nötiger Kenntnisse über Zwischenliegendes. Andere Fälle des Auseinanderliegens der Angriffspunkte bieten die elektrischen und magnetischen Kräfte, bei welchen ebenfalls die Gleichheit von Kraft und Gegenkraft gilt (E 14, 231, 314); hier war das Vorhandensein zwischenliegender Ketten von Kräften und Gegenkräften nicht leicht ersichtlich; sie sind aber gefunden, und wir behandeln sie als Kraftlinien in der Elektrizitätslehre (E 320, 436). Ein einziger Fall hat bisher keine mitwirkenden Einzelheiten im Raum zwischen den Angriffspunkten von Kraft und Gegenkraft erkennen lassen; es ist dies eben der Fall der Gravitation. Man mag ihr deshalb den Namen „Fernkraft" geben; jedenfalls ist es gut, vor Augen zu behalten, daß sie von anderer Art ist als die übrigen Kräfte (214). Dem Gesetz der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft gehorcht sie aber doch.

Wichtig ist für alle Fälle die Bemerkung, daß Kraft und Gegenkraft stets Kräfte gleichen Ursprungs sind. Zieht z. B. ein Magnet den Anker an, so ist die Gegenkraft hierzu die gleichgroße, ebenfalls magnetische Kraft, mit welcher auch der Anker den Magneten zieht, nicht etwa eine der magnetischen

Anziehung gegebenenfalls das Gleichgewicht haltende — und dann ihr allerdings ebenfalls entgegengesetzt gleiche — elastische Kraft. Ebenso dürfen nicht etwa Ziehkraft und Fliehkraft (Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft) bei kreisender Bewegung als Kraft und Gegenkraft betrachtet werden; denn sie sind verschiedenen Ursprungs[1]). Daß als Gegenkraft stets nur eine Kraft gleichen Ursprungs in Betracht kommen kann, dies ist durch die erfahrungsmäßige Gültigkeit des Schwerpunktssatzes und des Flächensatzes (215) bedingt, welche beide aufs engste mit der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft verknüpft sind derart, daß ein Fall des Versagens dieser Gleichheit auch jene beiden Sätze ungültig machte. Es muß daher in der Natur aller Kräfte liegen, daß keine derselben ohne ihre gleichgroße Gegenkraft je auftreten kann, und dies wäre nicht gewährleistet, wenn die Gegenkrcft eine nach Willkür abzuändernde, beliebige Kraft sein könnte (vgl. 219).

210. Schwerkraft als Resultierende vieler Einzelkräfte. — Die allgemeine Gültigkeit des Gravitationsgesetzes, das für je zwei beliebige, auch kleine Massen durchaus bewährt ist (212), läßt nicht zweifeln, daß es auch auf je zwei einzelne Atome des Weltalls bezogen werden kann und daß somit die Gesamtkraft, welche beispielsweise die Erde auf ein Atom an ihrer Oberfläche ausübt (das Gewicht dieses Atomes), die Resultierende all der von den ungeheuer vielen einzelnen Atomen (oder Raumelementen) des Erdkörpers herrührenden Einzelkräfte sein muß[2]). Es ist dann aber die Frage, ob es richtig war so zu rechnen (206, 208), als ginge die Gesamtkraft nur vom Erdmittelpunkt aus, als wäre die Gesamtmasse der Erde in diesem Punkte vereinigt. Auch diese Frage hat Newton eingehend untersucht, und er findet, daß die Rechnung mit dem Mittelpunkt, wie soeben angegeben, zutrifft falls die Erde entweder überall gleich dicht ist oder doch konzentrisch kugelförmig geschichtete Dichtenverteilung hat. Angenommen ist dabei, daß auch alle tief im Erdinnern liegenden Raumelemente voll mitwirken, wie es ihrer Masse und dem Entfernungsquadrat entspricht, trotz Ausfüllung des Raumes zwischen ihnen und dem angezogenen Körper mit den Massen der Erdschichten. Die Rechnung mit dem Erdmittelpunkt hat sich aber durchaus bewährt, wodurch es gesichert ist, daß, wie angenommen, die Gravitation durch alles ungehindert hindurchwirkt.

Auch für nahe kugelförmige Ellipsoide gilt noch die Rechnung mit dem Mittelpunkt, und dies ermöglichte Newton, als zweiten Grund (außer der Zentrifugalkraft, vgl. 203) für die Verminderung der Schwerkraft am Äquator (191) den dort infolge der Erdabplattung größeren Abstand vom Erdmittelpunkt anzugeben.

Damit wurde die Größenverteilung der Schwerkraft auf der ganzen Erdoberfläche und ebenso auch in beliebigen Höhen über derselben vollständig und zutreffend angebbar.

Im Erdinneren ist die Schwerkraft vermindert, weil dort ein Teil der Raumelemente nach oben zieht. Newton konnte schon zeigen, daß nur die

---

[1]) Außerdem ist die Fliehkraft überhaupt keine Kraft; sie genügt nicht der Definition (62; vgl. 194, 195).

[2]) Der Äther der Erde, der vereinigte Äther aller ihrer Teile, dürfte nach Maßgabe seines Gefälles die Resultierende fertig bewirken (s. E 585).

Gravitationswirkung eines inneren, konzentrisch kugelförmigen Teiles der Erdkugel übrigbleibt, welcher bis zum betrachteten Ort reicht. Die Einzelkräfte der darüber liegenden Kugelschale heben sich gegenseitig auf (geben die Resultierende Null, vgl. E 39). Im Erdmittelpunkt verschwindet daher die Schwerkraft; am größten im ganzen Raum ist sie an den Polen.

Es ist seit Newton eine besondere Rechenweise für Kräfte herausgebildet worden, die nach dem verkehrten Entfernungsquadrat wirken („Potentialtheorie"); sie liefert (meist schwierig und umständlich) Größe und Richtung der resultierenden Gravitationskraft beliebig geformter Körper von gegebener Massenverteilung überall im Raum. Für alle naheliegenden einfachen Fälle hat schon Newton die Lösungen gegeben.

211. Planetenstörungen. — Eine Folgerung aus der mit dem Fortschreiten von Newtons Forschungen immer deutlicher werdenden Allgemeingültigkeit des Gravitationsgesetzes war diese, daß nicht nur die zuerst betrachteten Kräfte zwischen der Sonne und jedem einzelnen Planeten bestehen müssen, sondern auch dem Gesetze entsprechende Kräfte zwischen je zweien der Planeten untereinander. Hatten die erstbetrachteten Kräfte vollkommen der in Keplers 3 Gesetzen zusammengefaßten damaligen Kenntnis über die tatsächlichen Bewegungen der Planeten entsprochen, so daß man diese Kenntnis aus dem so angewandten Gravitationsgesetz zusammen mit dem Grundgesetz hätte vorausberechnen können, so mußte die Hinzunahme der gegenseitigen Kräfte der Planeten offenbar andere, von Keplers Gesetzen abweichende Bewegungen geben. Solche Bewegungen haben sich aber bei genügend verfeinerter Beobachtung als wirklich vorhanden gezeigt. Daß die Abweichungen nur gering sind — meist ganz hinausgehend über die zu Tychos und Keplers Zeit erreichbare Beobachtungsgenauigkeit —, dies ist durch die überwiegend große Masse der Sonne bedingt, gegenüber welcher die Planetenmassen klein sind. Die Hauptkräfte für die Planetenbewegungen gehen daher tatsächlich von der Sonne aus, und die verhältnismäßig geringen gegenseitigen Kräfte der Planeten ändern wenig. Die geringen Änderungen werden dementsprechend von den Astronomen „Störungen" genannt, und die tatsächlich beobachteten Störungen zeigten sich richtig aus jenen gegenseitigen Kräften vorausberechenbar.

Nur der Planet Uranus (1781 mit dem Fernrohr entdeckt) zeigte darüber hinausgehende Störungen. Es war durch Rechnung zu prüfen, ob diese Störungen etwa von einem noch unbekannten, noch weiter ab von der Sonne kreisenden Planeten stammten. Der Versuch glückte: der Planet wurde als sehr kleiner Stern nahe bei dem Orte am Himmel aufgefunden, wo die Rechnung nach dem Gravitationsgesetz ihn hinwies, wenn er jene Störungen des Uranus bewirkt haben sollte; er hat den Namen Neptun erhalten (1846). Man hätte keinen überzeugenderen Nachweis für die Allgemeingültigkeit von Newtons Gravitationsgesetz — mindestens innerhalb des Sonnensystems — verlangen können, als diese Errechnung des Neptun[1]).

Die ersten Störungen hatte übrigens schon Newton selbst berechnet; sie betreffen den Erdmond, dessen Bewegungen in der Tat verwickelt sind, was schon früh auffiel. Die Hauptstörung geht hier von der zwar fernen, aber sehr

[1]) Ein spät nachgefolgter Nachweis derselben Art bot sich am Planeten Pluto.

massigen Sonne aus. Es tritt in solchen Fällen das „Dreikörperproblem" zutage: Drei Körper — wie Sonne, Erde und Mond — seien mit ihren Massen, Anfangsörtern und Anfangsgeschwindigkeiten gegeben; zu berechnen seien die Bewegungen, welche sie danach ausführen werden, nach Maßgabe von Galileis und Newtons drei Bewegungsgesetzen bei waltender Gravitationskraft nach deren ebenfalls sehr einfachem Gesetz. Es ist bemerkenswert, daß diese verhältnismäßig einfach erscheinende Rechenaufgabe schon die Mittel der vorhandenen Mathematik trotz deren angeschwollenem Umfang übersteigt, so daß alle solche Störungsrechnungen nur in aufeinanderfolgenden Annäherungen ausgeführt werden können.

212. Gravitation irdischer Massen gegeneinander. — Wichtig war der erst mehr als 100 Jahre nach Newton erbrachte Nachweis des Bestehens der Gravitation auch für die kleinen Massen auf der Erde untereinander. Die hier zu erwartenden Kräfte müssen nach Newtons Gesetz sehr klein sein, also für gewöhnlich unbemerkt bleiben; denn wenn beide im Zähler des Gesetzes stehende Massen klein sind, nützt auch die Verkleinerung des Nenners, durch den dann möglichen kleinen Abstand der Massen nichts, weil der Abstand im Nenner zwar im Quadrat, im Zähler aber durch das Volum der Massen in dritter Potenz maßgebend ist.

Die Messung dieser kleinen Kräfte wurde zuerst von Cavendish ausgeführt (1798). Er benutzte eine Drehwaage (vgl. 271), bestehend aus einem leichten horizontalen Stab, der in seiner Mitte an einem 1 m langen, dünnen Draht aufgehängt war und der an seinen beiden Enden je eine Bleikugel trug. Der Stab war 1·8 m lang, die Kugeln hatten 5 cm im Durchmesser. Neben diese beiden beweglichen Kugeln konnten zwei größere Bleikugeln so gebracht werden, daß deren auf die kleineren ausgeübte Anziehung eine Ablenkung des Stabes unter Drillung des Aufhängedrahtes hervorbringen mußte. Die größeren Kugeln hatten 30 cm Durchmesser. Der Abstand der Mittelpunkte der aufeinander wirkenden Kugeln war 22·5 cm. Die sehr kleine Ablenkung, welche die Anziehung bewirkte, wurde unter größten Vorsichtsmaßregeln gegen leicht störende Luftströmungen gemessen. Um die Ablenkung in Kraftmaß auszuwerten war nur die Schwingungsdauer des beweglichen Teils am Drahte zu messen, woraus bei berechnetem Trägheitsmoment die Direktionskraft nach Gl. 185 folgte (187) und aus dieser mit der Armlänge und der Ablenkung die Kraft.

213. Gravitationskonstante. Dichten der Himmelskörper. — So war zum ersten Male die Gravitation irdischer Massen gegeneinander nicht nur als tatsächlich vorhanden nachgewiesen worden, sondern es war auch die Größe der Kraft bei bekannten Massen gemessen. Damit war aber auch erst die Möglichkeit gegeben, aus beobachteten Gravitationswirkungen der Himmelskörper deren Massen in vorgegebener Einheit — nicht bloß vergleichsweise — zu berechnen. Man muß bedenken, daß das Gravitationsgesetz, nach welchem eine solche Berechnung zu erfolgen hat, nur aussagt, daß die Kräfte proportional sind dem Produkt der Massen und dem verkehrten Abstandsquadrat. Der Proportionalitätsfaktor ist dabei unbestimmt, und er konnte niemals aus Himmelsbeobachtungen ermittelt werden, weil man dabei niemals mit Massen zu tun hat, deren Größen schon bekannt wären. Auch im Falle des Gewichtes auf der Erde ist zwar die Masse des einen gravitierenden Körpers, des Gewichtes,

bekannt, nicht aber die Masse des zweiten Körpers, nämlich der Erde. Bezeichnen wir den unbekannten Proportionalitätsfaktor des Gravitationsgesetzes mit γ so sagt das Gesetz $K = \gamma m_1 m_2 / r^2$, und γ — Gravitationskonstante genannt — bedeutet dann die Kraft, mit welcher zwei Einheitsmassen aus Einheitsabstand einander anziehen. Es ist keineswegs anzunehmen, daß diese Kraft etwa gleich der Krafteinheit, somit $\gamma = 1$ sei; denn das Gravitationsgesetz wurde bei der Festsetzung der Einheiten niemals berücksichtigt, und die 3 Grundeinheiten wurden sogar ganz willkürlich gewählt (68)[1]. Vielmehr kann γ nur durch einen Versuch mit bekannten Massen ermittelt werden, wie es der von Cavendish war. Man findet, wenn man das absolute Einheitssystem benutzt (192), also die beobachtete Kraft K in dyn, die beiden Massen m_1 und m_2 in gr und ihren Abstand r in cm rechnet, $\gamma = 6{\cdot}68 \cdot 10^{-8}$ dyn cm²/gr².

Hiernach kann die unbekannte Masse der Erde aus der bekannten Kraft, mit welcher die Masseneinheit auf der Erdoberfläche angezogen wird, berechnet werden. Man findet als Masse der Erde $601 \cdot 10^{25}$ gr. Dividiert man diese große Zahl durch das Volum der Erde, welches in cm³ ebenfalls eine sehr große Zahl ist, so erhält man die (mittlere) Dichte oder das spezifische Gewicht (125) des Erdkörpers. Dieses wurde bereits von Cavendish berechnet und zu rund 5·5 gr/cm³ gefunden.

Vielfach ausgeführte Wiederholungen von Gravitationsmessungen an bekannten Massen, auch nach abgeänderten Verfahren, haben dieses Ergebnis bestätigt und die zahlenmäßige Kenntnis verfeinert (γ wie schon angegeben; Erddichte 5·53 gr/cm³).

Aus der nun bekannten Erdmasse und den im Vergleich zu dieser schon von Newton berechneten Massen von Sonne und Planeten (208) können unmittelbar auch die Massen dieser Himmelskörper in gr und somit auch ihre mittleren Dichten berechnet werden. Diese Dichten sind zum Teil überraschend klein, die der Sonne ist nur 1·4 gr/cm³; aber auch Jupiter, Uranus und Neptun haben nahe diese, nicht viel über die des Wassers hinausgehende Dichte, Saturn sogar nur 0·7 gr/cm³, also weniger als Wasser. Nur die inneren Planeten, Merkur, Venus, Erde, Mars, haben größere Dichten.

Vergleicht man die mittlere Dichte der Erde, 5·5 gr/cm³ mit den Dichten der schwersten, in der Erdrinde in größeren Mengen auffindbaren Gesteine, die kaum über 3 gr/cm³ hinausgehen (s. Tab. 2), so sieht man ein, daß das Erdinnere vorwiegend aus sehr schweren Körpern bestehen muß, die allerdings zur Zeit als dieses Innere noch flüssig war gegen den Erdmittelpunkt hin gesunken sein müssen.

214. Besonderheiten der Gravitation. — Die Gravitation ist bei kleinen Massen eine schwache Kraft. Als gegenseitige Anziehung der auf der Erde beweglichen Massen konnte sie deshalb gar nicht entdeckt werden. Cavendishs oben angegebene Bleikugeln (212) ziehen einander z. B. nur mit etwa 0·015 mgr

---

[1]) Man bemerkt, daß das Gravitationsgesetz eine Möglichkeit gibt, mit weniger als 3 Grundeinheiten auszukommen. Es wäre eine der 3 Einheiten (Länge, Zeit, Kraft im irdischen oder Länge, Zeit, Masse im absoluten System) mittels der beiden anderen so zu wählen, daß $\gamma = 1$ wird; diese so gewählte Einheit würde dann eine abgeleitete Einheit, und es wären mit ihr auch alle anderen Einheiten auf nur 2 Grundeinheiten, etwa cm und sek, stützbar. (Vgl. weiter E 464).

Kraft an. Nur bei den großen Massen der Himmelskörper erreicht die Gravitation bedeutende Größen, ganz wie es ihrem allgemeinen Gesetze (Abb. 48) entspricht.

Einzigartig unter allen bekannten Kräften ist die Gravitation als „Fernkraft" (209). Elektrische und magnetische Kräfte wirken auch in die Ferne und zwar ebenfalls nach dem Entfernungsquadratgesetz, aber sie tun dies mittels elektrischer und magnetischer Kraftlinien, die im Zwischenraum mit ihren Einzelheiten verfolgbar geworden sind, und diese Kraftlinien bezeichnen stets den Aufenthalt von Energie (E 122 u. f., 273 u. f.). Im Raum zwischen gravitierenden Massen ist dagegen nichts Derartiges, auch keine Energieverteilung merklich geworden.

Elektrische und magnetische Kräfte können abgeschirmt werden (E 43, 252, 384) und sie zeigen Verspätungen (E 422). Gravitation wirkt unvermindert überallhin und durch alles hindurch (210), auch ohne merklich gewordene Verspätungen, nur nach ihrem Abstandsgesetz.

Jedes Atom ist demnach stets überall gegenwärtig mit seiner Gravitation, wenn es auch mit seinen sonstigen Kräften auf einen sehr eng begrenzten Raum beschränkt ist. Die Erscheinungen des Lichtes und der elektrischen Induktion zeigen, soweit ergründet, daß jedes Atom seinen besonderen, mit ihm gehenden Ätheranteil hat (O 23, E 405), und dieser ist es wohl, der seine Gravitation bewirkt (s. E 585).

Die Gravitationswirkung gehört übrigens nicht nur den Atomen zu, sondern wohl allen Massen (E 437, 582), und Masse (Trägheit) ist Eigenschaft der Energie (157, E 435). Auch die Massen der Atome gehören — vielleicht ganz — ihrem unzweifelhaft sehr großen Energiegehalt an, und Gravitation erscheint demnach in letzter Linie als *Energie-Eigenschaft*. Was vorhin von der Allgegenwart der Atome gesagt wurde, gälte demnach als Allgegenwart jeder Energiemenge mit ihrem Äther (vgl. E 585, 591).

Schwerpunktssatz; Flächensatz.

215. *Bedeutung der Sätze.* — Diese beiden Sätze bilden den wesentlichsten Inhalt von Newtons drittem Bewegungsgesetz (209), dem der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft. Sie sind im allgemeinen besser der Erfahrungskontrolle zugänglich als jene Gleichheit. Newton hat die Erfahrungskontrolle an der ganzen Himmelsmechanik gebracht, wovon wir im folgenden Beispiele geben, und sie ist heute außerordentlich weitgehend an allen irdischen Bewegungsvorgängen vervollständigt. Daß die Sätze im besonderen auch bei Wirkung elektrischer und magnetischer Kräfte volle Geltung behalten, war zu Newtons Zeit nicht vorauszusehen; es zeigt sich aber, daß auch hier Kräfte und Drehmomente stets paarweise in entgegengesetzter Gleichheit auftreten, wie es den beiden Sätzen entspricht (E 14, 231, 314).

Das Besondere der beiden Sätze ist, daß sie eine sehr vereinfachte Betrachtung und Behandlung von Bewegungsvorgängen an Körpern oder Körpergruppen erlauben, die entweder äußerer Einwirkung ganz entzogen sind oder doch nur bestimmt gegebene Kräfte von außen her erfahren, während in ihrem Inneren beliebige, auch unbekannte Kräfte wirken dürfen.

216. Innere und äußere Kräfte. — Man nennt „innere Kräfte" einer Körpergruppe solche Kräfte, deren Gegenkräfte (vgl. 209) ebenfalls innerhalb der Gruppe ihren Angriffspunkt haben. Liegt jedoch der Angriffspunkt der Gegenkraft außerhalb der Gruppe, so wird die Kraft eine „äußere" genannt.

217. Für den Fall nur innerer Kräfte einer Körpergruppe sagt der Schwerpunktssatz, daß der Schwerpunkt der Körpergruppe von allen Bewegungen ihrer Teile unbeeinflußt bleibt, daß er also in Ruhe oder in gleichförmig gradliniger Bewegung verharrt.

Daß dies nach dem Grundgesetz und nach der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft (Newtons zweitem und drittem Bewegungsgesetz) so sein muß, ist leicht einzusehen. Man betrachte irgendeine in der Körpergruppe wirkende Kraft K; sie greife an der Masse m_1 an. Ihre Gegenkraft, ebenfalls K, greife an m_2 an. Es werden dann nach dem Grundgesetz (115, 134) in einer Zeit t die beiden Massen die Zusatzgeschwindigkeiten $v_1 = (K/m_1)t$ und $v_2 = (K/m_2)t$ erhalten, wonach $m_1v_1 = m_2v_2$ sein wird. Die neu auftretenden Geschwindigkeiten der verschiedenen aufeinander wirkenden Massen werden also diesen Massen verkehrt proportional sein ($v_1 : v_2 = m_2 : m_1$) und ihre Richtung wird wegen der entgegengesetzten Richtungen der Kräfte entgegengesetzt sein. Es ist leicht einzusehen, daß dann die Lage des Schwerpunktes, der den Abstand der Massen stets in derem umgekehrten Verhältnis teilt (107), durch die Bewegung keine Änderung erleidet. Und was für die eine innere Kraft K gilt, gilt auch für alle anderen, also für die ganze Körpergruppe, wie es der Schwerpunktssatz sagt.

218. Zugleich sieht man auch, daß nach dem Grundgesetz berechnete Beschleunigungen und Geschwindigkeiten stets in bezug auf den gemeinsamen Schwerpunkt der Körper gelten, an welchen Kraft und Gegenkraft angreifen (vgl. 52, 116); denn eben die Geschwindigkeit und also auch die Beschleunigung dieses Schwerpunktes ergibt sich, soweit sie von diesen Kräften herrührt, nach dem Schwerpunktssatz zu Null.

219. Die im Schwerpunktssatz hervortretende wichtige dynamische Bedeutung des Schwerpunkts, der ursprünglich nur mit Rücksicht auf die Schwerkraft eingeführt war und nur statische Bedeutung hatte (106, 111), beruht — wie aus dem Vorstehenden ersichtlich — darauf, daß Gewicht und Masse stets einander proportional sind. So ist der Schwerpunkt, welchen wir als mittleren Ort aller Gewichtsteile fanden (107, 108) gleichzeitig auch der mittlere Ort aller Massenteile, und als solcher ist er für die Bewegungsvorgänge maßgebend.

Es verharrt demnach der mittlere Ort der Masse nach dem Schwerpunktssatz in gradliniger gleichförmiger Bewegung wenn nur innere Kräfte wirken. Man sieht daraus, daß der Schwerpunktssatz dieselbe Bedeutung hat wie das Trägheitsgesetz (72, 116), und die für die inneren Kräfte dabei maßgebende Gleichheit von Kraft und Gegenkraft — das paarweise Vorhandensein aller Kräfte — erscheint somit als Folge der Trägheitseigenschaft der Materie (Energie) und gleichbedeutend mit dieser.

220. Da das Produkt mv Bewegungsgröße heißt (116), kann der Schwerpunktssatz auch Satz von der Erhaltung der Bewegungsgröße benannt werden. Denn bei der entgegengesetzten Richtung von v_1 und v_2 in voriger Rechnung (217) müssen die beiden Bewegungsgrößen m_1v_1 und m_2v_2 auch

mit entgegengesetzten Zeichen gerechnet werden, so daß die beiden, durch Wirkung von Kraft und Gegenkraft neu aufgetretenen Bewegungsgrößen einander aufheben (zusammen Null geben), eine schon vorhanden gewesene Bewegungsgröße also ungeändert erhalten geblieben ist. Dies gilt auch von der gesamten Bewegungsgröße der Körpergruppe, die Σmv ist, wobei alle mv geometrisch als Vektorgrößen zu addieren sind (45), da v Vektorgröße ist. Man kann dann den Satz auch in der Form schreiben

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv = 0\,, \qquad 220)$$

was besagt, daß die zeitliche Änderung der gesamten Bewegungsgröße einer Körpergruppe Null ist wenn nur innere Kräfte wirken.

221. Folgendes sind Beispiele der Anwendung des Schwerpunktssatzes beim Fehlen äußerer Kräfte, woran dann weitergehende Folgerungen sich schließen (222—226).

Wenn eine Kanone abgefeuert wird, weicht sie zurück mit einer Geschwindigkeit die nach ihrer, sowie des Geschosses Masse und nach des letzteren Geschwindigkeit sich so einrichtet, daß der Gesamtschwerpunkt von Geschoß und Geschütz trotz des Abschusses in Ruhe bleibt. Denn diese zusammen erfahren nur innere Kräfte. Eine Änderung tritt erst ein, wenn die Bewegung des Geschützes äußere Kräfte weckt, z. B. elastische Kräfte durch Befestigung an der Erde.

Man kann die Erdkugel zusammen mit einem Körper auf ihr als Gruppe betrachten, in der nur innere Kräfte wirken wenn z. B. der Körper gehoben wird. Von der äußeren Kraft, welche die Sonne ausübt, kann man absehen, wenn man auch von der Bahnbewegung der Erde absieht. Es ist dann kein Zweifel, daß die Erdkugel ein wenig nach unten zurückweichen muß wenn ein Körper auf ihr gehoben wird. Aber da die Masse der Erdkugel so sehr viel größer ist als die des Körpers, wird auch ihr zur Unbeeinflußtheit des Schwerpunktes nötiges Zurückweichen entsprechend sehr viel geringer sein als die Aufwärtsbewegung des Körpers.

Sehr vollkommen äußeren Kräften entzogen ist das gesamte Sonnensystem, da alle anderen gravitierenden Massen sehr weit ab sind. Es hat daher schon Newton ausgesprochen, daß alle Bewegungen im Sonnensystem so vor sich gehen müssen, daß sein Gesamtschwerpunkt in Ruhe oder in gleichförmig gradliniger Bewegung verharrt.

Man bemerkt, daß auch bei Betrachtung eines einzelnen Planeten nicht dieser um die ruhende Sonne laufend gedacht werden darf, sondern Planet und Sonne laufen zusammen um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Nur weil die Masse der Sonne so groß ist (208), daß dieser Schwerpunkt doch immer innerhalb des Sonnenkörpers liegt, sind die der Sonne zugehörigen Bewegungen entsprechend gering. Doch ist für Keplers 1. Gesetz festzuhalten, daß genau — von den Störungen (211) aber immer abgesehen — nicht der Sonnenmittelpunkt, sondern der Schwerpunkt von Sonne und Planet im Brennpunkt der Bahnellipse des Planeten steht.

Bei den zahlreichen im Himmelsraum aufgefundenen Doppelsonnen hat man Beispiele von weit weniger ungleichen Massen, die ebenfalls um ihren gemeinsamen, in diesem Falle im Raum zwischen ihnen liegenden Schwerpunkt laufen.

222. Schwerpunktsachsen größten Trägheitsmoments sind freie Achsen. — Drehmomente, die keine äußere Resultierende auf den Schwerpunkt geben (s. 227), können nach dem Schwerpunktssatz nichts an der Bewegung des Schwerpunkts ändern; es erfolgt nur Drehung um den Schwerpunkt, die sich über etwa vorhandene fortschreitende Bewegung lagern kann (43—45, 178).

Man versetze die an einem Faden hängende Metallscheibe Abb. 49a von der Aufhängeöse aus in Drehung um den Faden als Achse. Der Schwerpunkt S der Scheibe ist vor Eintritt der Drehung in Ruhe; nach dem Schwerpunktssatz muß er auch nach Eintritt der Drehung in Ruhe sein, d. i. er muß in der Achse sein.

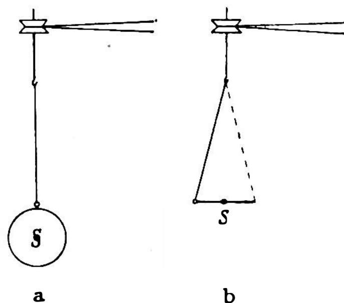


Abb. 49. Schwerpunktsachsen.

Dies zeigt sich auch, ungestört vom Hinzutreten einer besonderen, für Drehung charakteristischen Erscheinung, die man dabei beobachten kann:

Ist die Drehung zunächst langsam, so bleibt die Scheibe so am Faden, wie es Abb. 49a zeigt; der Faden, der als Vermittler des Drehmomentes wirkt, ist zugleich auch Achse. Dreht man aber schneller, so geht die Scheibe in Horizontalstellung über, wie Abb. 49b sie zeigt; der an ihrem Rande befestigte Faden geht somit aus der Achse, der Schwerpunkt S aber bleibt in der Achse, also in Ruhe, wie er es von Anfang war.

Daß die Scheibe eine neue Achse annimmt ist Folge der Zentrifugalkraft, die die Massen möglichst weitab von der Achse bringt[1]). In der Lage 49a sind die in der Verlängerung des Fadens liegenden Teile der Scheibe sämtlich in der Achse; in der Lage 49b sind sie von der Achse entfernt und nur die Mitte der Scheibe allein ist in der Achse. Da möglichst weites Abliegen der Massen von der Achse das Trägheitsmoment (181) möglichst groß macht, kann man auch sagen: Eine um eine nicht fest vorgegebene, frei wählbare Achse gedrehter Körper sucht die Schwerpunktsachse größten Trägheitsmomentes (183) auf.

Schwerpunktsachsen größten Trägheitsmoments halten sich daher von selber ruhig, wenn keine äußeren Kräfte wirken; sie bedürfen gar keiner Lagerung und werden deshalb auch freie Achsen genannt.

Soll ein Körper um eine außerhalb seines Schwerpunkts liegende Achse gedreht werden, wobei der Schwerpunkt nicht in Ruhe bleibt, so muß man stets äußere Kräfte anwenden. Gewöhnlich, z. B. bei den Rädern von Maschinen, müssen die Achsenlager diese Kräfte hergeben; die zugehörigen Gegenkräfte werden dann auf die Umgebung ausgeübt, wodurch diese — wegen der fortdauernd im Kreise herum wechselnden Richtung dieser Kräfte — in um so stärkere Erschütterung kommt, je massiger das Rad und je exzentrischer sein Schwerpunkt ist. Um solche leicht gefährliche Erschütterungen zu vermeiden, wird, z. B. bei Lokomotivenrädern mit ihren Kurbeln, der Schwerpunkt der beweglichen Teile stets durch Zusatzmassen sorgfältig in die Achse gebracht.

---

[1]) Dazu gehört noch die fortdauernde Energiezufuhr durch Weiterwirken des Drehmoments und das allmähliche Verschwinden der Drehung um die zuerst vorhandene Achse durch Reibung.

223. Ebbe und Flut. — Eine freie Schwerpunktsachse nimmt auch das durch eine Kette verbundene Kugelpaar mM Abb. 50 an, wenn es an dem Faden a b hängend, der irgendwo an der Kette befestigt ist, in genügend schnelle Drehung versetzt wird. Es stellt sich von selber die Schwerpunktsachse a S ein; beide Kugeln samt Aufhängefaden laufen um den in Ruhe bleibenden gemeinsamen Schwerpunkt S, während die Kette die nötige Zentripetalkraft hergibt[1]).

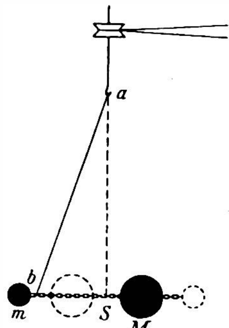


Abb. 50. Schwerpunktssatz.

Wie dieses Kugelpaar so rotieren auch Mond und Erde um ihren gemeinsamen Schwerpunkt, und dieser ist es, der die jährliche Erdbahnellipse beschreibt. Eine Wirkung dieses Kreisens von Mond und Erde um ihren gemeinsamen Schwerpunkt ist die altbekannte Erscheinung von Ebbe und Flut, was auch erst von Newton gezeigt wurde. Die Erscheinung selbst besteht — in den großen Hauptzügen — in zweimal täglichem Steigen und Sinken des Wassers der großen freien Meere und zwar (nahezu) so, daß höchster Wasserstand immer zu Zeiten höchsten und aber auch tiefsten Standes des Mondes über bzw. unter dem Horizont eintritt, tiefster Wasserstand in den Zwischenzeiten, wenn der Mond in der Nähe des Horizontes ist. Stellt also in Abb. 51 E die Erde, M den Mond dar, so hat die (hier

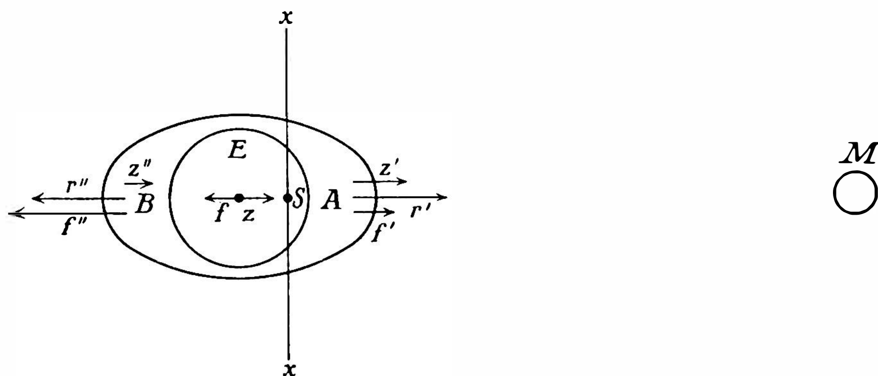


Abb. 51. Ebbe und Flut.

ununterbrochen gedachte) Wasserhülle der Erde die — in starker Übertreibung — gezeichnete Form mit zwei Wasserbergen A und B, deren einer stets gegen den Mond hin gerichtet ist, während der andere stets von ihm ab gerichtet ist. Da die tägliche Drehung der Erde um ihre durch den Erdmittelpunkt gehende, zu x x nahezu parallele Achse erfolgt, kommt — wie man sieht — jeder (der Mondbahnebene nicht allzu ferne) Ort der Erdoberfläche täglich zweimal zu höchstem und zu tiefstem Wasserstande, so daß die Hauptzüge der Gesamter-

[1]) Man kann bemerken, daß bereits früher (198, Abb. 44) zwei Massen um eine gemeinsame Achse rotierend betrachtet wurden und daß auch die dortige Überlegung zur Schwerpunktsachse für den Fall des Gleichgewichts innerhalb der rotierenden Massengruppe führt.

scheinung richtig jene zwei Wasserberge zum Ursprung haben. Die Frage ist daher nur, wie jene Wasserberge zustande kommen.

Mond und Erde kreisen monatlich um die durch ihren gemeinsamen Schwerpunkt S gehende Achse x x, die wegen der großen Masse der Erde noch durchs Erdinnere geht, in 3/4 Erdradius Abstand vom Erdmittelpunkt, wie gezeichnet. Der Erdmittelpunkt kreist also monatlich um x x. Dabei halten sich, wie bei jedem Kreisen, Ziehkraft (Gravitation des Mondes) und Fliehkraft (in ihren Resultierenden) das Gleichgewicht; doch können die beiden Kräfte nicht an jedem Punkt des Erdkörpers gleiche Größe haben, weil sie verschiedene Abstandsgesetze haben. Die Gravitation des Mondes (z in der Abbildung) richtet sich nach dem Abstand vom Mond, die Fliehkraft (f) aber nach dem Abstand von der Achse x x. Sind also die beiden Kräfte etwa (wie in der Abbildung gezeichnet) im Erdmittelpunkt (oder in dessen Nähe) einander entgegengesetzt gleich und haben sie dort die Resultierende Null, so müssen bei A und B resultierende Kräfte übrigbleiben. Die stets nach dem Monde gerichtete Gravitationskraft ist bei A vergrößert (z′), bei B verkleinert (z″). Die stets von der Achse weg gerichtete Fliehkraft hat bei A sogar gleiche Richtung (f′) mit der Gravitationskraft; bei B ist sie zwar der Gravitationskraft entgegengerichtet (f″), überwiegt aber dieselbe. Die Folge dieser Kraftverschiedenheiten ist das Übrigbleiben von resultierenden Kräften bei A und B (r′ und r″), welche beide vom Erdmittelpunkt weg gerichtet sind. Diese Resultierenden sind es, die, am beweglichen Wasser der Meere angreifend, die beiden Wasserberge und damit die Ebbe- und Fluterscheinungen geben.

Außer dem Mond wirkt auch die Sonne in gleicher Weise auf das Meer der Erde. Denn auch für die jährliche Bahn der Erde können Zieh- und Fliehkraft nicht an allen Teilen der Erde einander gleich sein; die eine nimmt gegen die Sonne hin zu, die andere ab. Die Flutwirkung der Sonne ist wegen ihrer sehr großen Masse trotz des großen Abstandes nicht klein; sie ist etwa 0·4 von der des Mondes. Da beide Wirkungen sich überlagern, ist leicht einzusehen, daß bei Voll- und Neumond höhere Fluten eintreten müssen als bei den Mondsvierteln. Aus den der Beobachtung entnommenen Höhen der Sonnen- und der Mondfluten konnte Newton bereits die Masse des Mondes berechnen, da ihm die der Sonne in Erdmasseneinheiten schon bekannt war (208).

224. Festigkeit des Erdinnern. — Sehr bemerkenswert ist es, daß die beobachteten Fluthöhen nicht wesentlich geringer sind als die wirkenden Kräfte sie erwarten lassen. Wäre nämlich das Erdinnere großenteils flüssig, so würde der ganze Erdkörper, da er an seiner Oberfläche denselben Kräften unterworfen ist, wie das Wasser, Ebbe- und Flutbewegungen machen müssen; eine feste Kruste könnte ihn daran nicht hindern. Es würde dann aber für das Meer keine merkliche Relativbewegung gegen die Erdoberfläche übrigbleiben. Die tatsächlich vorhandene Ebbe- und Fluterscheinung zeigt also an, daß das Innere der Erde trotz hoher Temperatur mindestens zum größeren Teil nicht flüssig, sondern fest ist. Soweit die Rechnungen gehen, zeigt sich die Erde den Flutkräften gegenüber ungefähr so starr wie eine Stahlkugel. Auch die Erdbebenwellen zeigen großenteils festen Zustand an (A 17), und die Kenntnis der hohen Drucke im Erdinnern läßt die Festigkeit trotz hoher Temperatur auch verständlich erscheinen (305, W 200).

225. Flutreibung. — Die durch Mond und Sonne festgehaltenen Flutberge müssen bei der täglichen Drehung der Erde dauernd sich umlagern; es muß immer wieder neues Wasser hochsteigen und wieder herabsinken, und dies ist nur mittels horizontalem Zu- und Abströmen des Wassers längs der Erdoberfläche möglich. Dabei werden die Flutbewegungen stark durch die Küsten der Festländer beeinflußt. Binnenseen können gar keine Ebbe- und Fluterscheinungen zeigen, weil ihnen die nötige Zu- und Abflußmöglichkeit des Wassers fehlt.

Bei den Umlagerungen der Flutberge wirken Reibung und Trägheit des Wassers mit, was die Gesamterscheinung beeinflußt. Durch die Reibung nimmt die Erde bei ihrer täglichen Drehung die Flutberge immer etwas mit sich voran; der Mond aber zieht den ihm zugewandten Flutberg — auf den er wegen größerer Nähe stärkere Gravitation ausübt als auf den abgewandten — zurück, und damit muß er die Erddrehung verlangsamen. Es ist dies eine immerfort wirkende Ursache der Verlangsamung der täglichen Drehung der Erde. Bisher sind von der Verlangsamung nur geringe Zeichen merklich geworden (32); es wirkt immer noch eine bald zu erwähnende beschleunigende Ursache — die Schrumpfung der Erde wegen ihrer Erkaltung (233) — genügend entgegen. Für die Brauchbarkeit der Zeiteinheit, der Sekunde, ist dies sehr wichtig (32). Da die beschleunigende Ursache nur in beschränktem Maß weiterwirken kann ist zuletzt andauerndes Anwachsen der Tageslänge zu erwarten bis sie einen Monat beträgt, so daß die Erde immer dieselbe Seite dem Monde zuwendet, womit die Flutreibung aufhört, soweit sie der Mond verursacht.

Da auch die Erde eine Flutwirkung auf dem Mond ausübt (so wie für die Flutwirkung der Sonne auf die Erde erläutert), wenn auch beim Fehlen von Flüssigkeitsbedeckung nur als geringe Verformung der festen Mondoberfläche, so muß auch eine Achsendrehung des Mondes der Verlangsamung unterliegen mit dem Endergebnis dauernder Zuwendung stets derselben Seite des Mondes gegen die Erde. Dieser Zustand ist beim Monde schon eingetreten. Es ist wohl der geringen Masse des Mondes zuzuschreiben, daß diese vollständige Anhaltung einer ursprünglich wohl vorhanden gewesenen Drehung schon erfolgt ist. Tatsächlich wendet der Mond dauernd dieselbe Seite der Erde zu; seine andere Seite ist uns infolgedessen unbekannt.

226. Flutwirkungen im Himmelsraum. — So wie der Mond die Erddrehung verzögert, muß mit der zugehörigen Gegenkraft die Erde den Mond in seiner Bahn beschleunigen (vgl. 231). Dies hat steigende Fliehkraft und somit eine Abstandszunahme des Mondes von der Erde zur Folge. Ist auch diese Wirkung heute sehr gering, so zeigt die Erkenntnis dieses Fluteinflusses doch an, daß der Mond früher näher der Erde gewesen sein muß, und im kleineren Abstand ist die Wirkung entsprechend größer. Daraus ist erkennbar, daß eine Masse, die einmal von einem rotierenden Himmelskörper, wie der Erde, sich abgelöst hat, was bei zunehmender Rotationsgeschwindigkeit durch Fliehkraft geschehen kann (vgl. 233), dauernd noch immer weiter abgetrieben wird, indem sie in der ursprünglich großen Nähe sehr starke Flutkräfte auf den Zentralkörper ausübt, welche, wie wir sahen, diese wegtreibende Wirkung haben. Der neu gebildete Mond entfernt sich so in Spiralbahnen erst schnell und dann langsamer von seinem Zentralkörper. Dies ist, soweit Kenntnis vorhanden, als die Entstehungsweise von Planeten aus Sonnen und von Monden aus Planeten anzunehmen. Daß fast alle Planeten- und Mondbahnen unseres Sonnensystems nahe in einer und derselben Ebene — der Ekliptik — liegen und daß fast alles in diesem System denselben Drehsinn zeigt, sowohl in den Bahnbewegungen als auch um die eigenen, meist wenig schief zur Ekliptik stehenden Achsen, dies weist in der Tat ganz besonders auf die Entstehung des ganzen Systems aus einer einzigen, ursprünglich schon im selben Sinne rotierenden Masse hin[1]).

---

[1]) Die mittlere Dichte des Mondes der Erde (3·4 gr/cm³) ist wenig größer als die mittlere Dichte der festen Erdkruste; es kann also auch hiernach der Mond ein vom Äußeren der Erde abgelöster Teil sein. Zu bemerken ist, daß die heute im Sonnensystem vorhandene gesamte Drehbewegungsgröße (vgl. 230) nicht ausreichend zu sein scheint für die gedachten Abschleuderungsvorgänge, daß jedoch Vermehrungen sowie Verminderungen der Drehbewegungsgröße bei allen Himmelskörpern durch die Gravitation vorüberziehender fremder Massen bewirkt werden können, so wie der Mond auf die Erddrehung wirkt (225). Den gemeinsamen Drehsinn im Sonnensystem betreffend sind einige Ausnahmen vorhanden: Die Mondbahnen des Uranus stehen samt dessen Äquator ungefähr senkrecht zur Ekliptik, was durch besondere Einflüsse in der ersten Ausbildungszeit des Sonnensystems verursacht sein kann. Neptuns Mond und die äußersten, ebenfalls sehr kleinen Jupitermonde sind rückläufig; sie könnten durch die Gravitation ihrer Planeten eingefangene Planetoiden sein.

Massen im Himmelsraum, die gegenwärtig solche Auflösung in spiralig abziehende Einzelmassen zeigen, und zwar meist von zwei diametral entgegengesetzten Seiten gleichzeitig, wie es einer Fluteinwirkung entspricht, sind die zahlreichen bekannten Spiralnebel, von denen Abb. 52 ein Beispiel zeigt[1]). Daß die Massen der Spiralen dieser Nebel von innen nach außen sich bewegen, ist in mehreren Fällen (spektroskopisch mittels Dopplers Prinzip, A 92) festgestellt (vgl. dazu auch 233). Im übrigen bieten diese Massen von ungeheurer Ausdehnung in den weit jenseits der Milchstraße liegenden Fernen noch Vieles, das dem Verständnis sich entzieht.

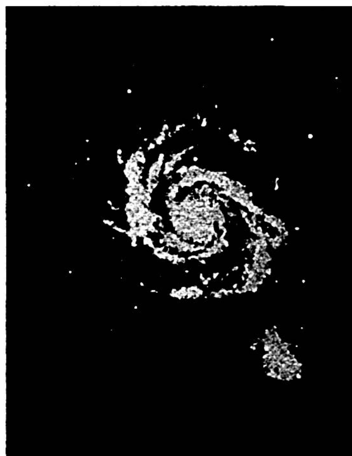


Abb. 52. Spiralnebel in den Jagdhunden (nahe dem Großen Bären).

227. **Wirken äußere Kräfte auf eine Körpergruppe, so sagt der Schwerpunktssatz: Man übertrage alle diese Kräfte mit Größe und Richtung auf den Schwerpunkt der Gruppe als Angriffspunkt und vereinige sie dort zu einer Resultierenden; die Bewegung des Schwerpunkts ist dann gegeben als gleich der eines Punktes mit der Gesamtmasse der Körpergruppe unter dem Einfluß dieser Resultierenden nach dem Grundgesetz. Oder: Der Schwerpunkt bewegt sich so, als griffen alle äußeren Kräfte nur an ihm an und als wäre die Gesamtmasse der Körpergruppe in ihm vereinigt. Die einzelnen Teile der Gruppe können dabei unter dem Einfluß innerer Kräfte und ihrer Trägheit vielerlei Bewegungen machen, die aber alle so sich einrichten müssen, daß die angegebene Bewegung des Gesamtschwerpunkts unbeeinflußt bleibt.**

Die Richtigkeit der Übertragung der äußeren Kräfte auf den Schwerpunkt ist folgendermaßen einzusehen (Abb. 53): Es wirke die in a (oder sonstwo in derselben Geraden, 94) angreifende äußere Kraft K auf eine Körpergruppe, deren Schwerpunkt S ist. Fügt man die beiden entgegengesetzt gleichen Kräfte K′ und K″ an S angreifend hinzu, so wird dies nichts ändern. Ist aber K′ nach Größe und Richtung gleich K (wie es die Abbildung darstellt), so geben K und K″ zusammen keine fortschreitende Bewegung, sondern nur Drehung, die gesondert zu betrachten ist (178, wofür der Flächensatz dient, 230). Es bleibt dann für die fortschreitende Bewegung der Gruppe nur die Kraft K′ übrig, und dies ist eben die zum Schwerpunkt übertragene äußere Kraft.

Was das Drehmoment anlangt, welches die beiden Kräfte K und K″ der Gruppe erteilen, so ist es $Kr + K''r = K \cdot 2r$, also gleich dem Drehmoment der äußeren Kraft K um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse (vgl. 222), und dies ist maßgebend bei der Anwendung des Flächensatzes (230).

228. Man kann den Satz 227 mit Benutzung der Gedankengänge und Bezeichnungen von 220 in der Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\Sigma mv = K, \qquad 228)$$

was besagt, daß die zeitliche Änderung der gesamten Bewegungsgröße Σmv der Körpergruppe gleich ist der Resultierenden K der äußeren Kräfte. Hierbei bemerkt man, daß Gl. 228 eine Verallgemeinerung des Grundgesetzes (Gl. 116b) für den Fall zerteilter Massen ist, sowie daß Gl. 220 in dieser Verallgemeinerung ebenfalls enthalten ist, indem beim Fehlen äußerer Kräfte $K = 0$ ist.

[1]) Nach einer Aufnahme der Königstuhl-Sternwarte.

229. Beispiele der Anwendung des Schwerpunktssatzes bei Wirkung äußerer Kräfte.

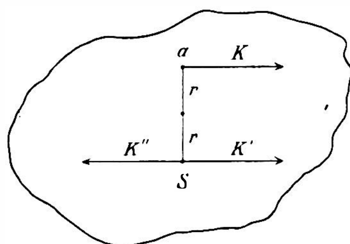


Abb. 53. Außerhalb des Schwerpunktes angreifende äußere Kraft.

Man werfe einen Stab in beliebiger Weise. Er mag auf seiner Wurfbahn um beliebige Achsen sich drehen, sich überschlagen, elastische Erzitterungen oder sonstige Bewegungen ausführen, die nur von inneren Kräften und durch seine Trägheit veranlaßt sind: es muß dies alles doch so vor sich gehen, daß sein Schwerpunkt unbeeinflußt die seiner Anfangsgeschwindigkeit entsprechende Wurfparabel verfolgt.

Explodiert ein Geschoß in seinem Fluge, so setzt der Gesamtschwerpunkt seiner Teile doch unbeeinflußt seine Bahn weiter fort; denn es haben bei der Explosion nur innere Kräfte gewirkt.

230. Flächensatz. — Der Schwerpunktssatz betraf nur die fortschreitende Bewegung von Körpergruppen; er gibt alle Bewegungen des Schwerpunkts der Gruppe an. Sind Drehbewegungen vorhanden, so macht für diese der Flächensatz entsprechende Aussagen; er gibt an, in welcher Weise die Gruppe Drehungen um ihren nach dem Schwerpunktssatz bewegten Schwerpunkt ausführt. Man erhält den Flächensatz nach dem für die Drehbewegung im allgemeinen schon Vorgebrachten (184) aus dem Schwerpunktssatz, Gl. 228, wenn man alle in ihm für die fortschreitende Bewegung geltenden Größen durch die entsprechenden, für Drehbewegung geltenden ersetzt (vgl. Tab. 6). Dies gibt

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma M\omega = D\,, \qquad 230)$$

oder in Worten: Die zeitliche Änderung der gesamten Drehbewegungsgröße der Körpergruppe, $\Sigma M\omega$, ist gleich dem gesamten Drehmoment D aller äußeren Kräfte. Alle Drehung ist dabei nur auf Schwerpunktsachsen bezogen (vgl. 222, 227).

Haben im besonderen die äußeren Kräfte kein Drehmoment, $D = 0$, greifen sie z. B. am Schwerpunkt an, so sagt der Satz, Gl. 230, daß die gesamte Drehbewegungsgröße $\Sigma M\omega$ unverändert erhalten bleibt.

231. Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung auch für Drehungen. — Sind bei unveränderlichen Trägheitsmomenten M innere Kräfte da, die ein Drehmoment ergeben, das einen Teil der Winkelgeschwindigkeiten ω verändert, so müssen nach 230 gleichzeitig die inneren Gegenkräfte einen anderen Teil der Winkelgeschwindigkeiten entsprechend entgegengesetzt verändern, so daß $\Sigma M\omega$ unverändert bleibt. Dies bedeutet, daß Drehmomente stets paarweise einander entgegengesetzt gleich vorhanden sein müssen; es ist dies die der Gleichheit von Kraft und Gegenkraft entsprechende Aussage für die Drehbewegung.

Wenn eine Katze mit dem Rücken nach unten vom Dach zu Fall kommt, wirbelt sie während des Fallens den Schwanz kurbelartig um eine horizontale Achse herum. Dadurch muß — dem Flächensatz entsprechend — der übrige Körper um die gleiche Achse zurück sich drehen, und so kommt das Tier gut auf die Pfoten zur Erde.

232. Ein Beispiel für den Flächensatz beim Fehlen äußerer Kräfte ist auch Keplers 2. Gesetz (205) mit den in gleichen Zeiten gleichen Leitstrahlen-Flächen (woher auch der Name „Flächen-

satz“ genommen ist). Man sieht durch folgende Rechnung leicht ein, daß die vom Leitstrahl in der Zeiteinheit beschriebenen Flächen ein Proportionalmaß für die Drehbewegungsgröße $\Sigma M\omega$ von Planet und Sonne geben und daß somit die gleichbleibende Größe dieser Flächen dasselbe sagt, wie der Flächensatz.

Es ist in Abb. 47 die schraffierte Dreiecksfläche mit dem beliebigen Leitstrahl r $f = s \cdot h/2 = (sr \cos \alpha)/2$. Die Winkelgeschwindigkeit ω ist aber, wenn man die Gleichheit der beiden mit α bezeichneten Winkel berücksichtigt (deren Schenkel bei beliebig klein anzunehmendem s senkrecht aufeinander stehen), $\omega = (s \cos \alpha)/rt$, wenn t die Zeit ist, in welcher s zurückgelegt wird. Es ist daher die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche $f/t = r^2\omega/2$. Diese und daher auch $r^2\omega$ soll nach Keplers 2. Gesetz unveränderlich bleiben.

Demgegenüber sagt der Flächensatz, daß $\Sigma M\omega$ unveränderlich bleiben soll. Dies bedeutet aber, wenn m die Masse des Planeten, m_0 die der Sonne ist, welche beide mit der gemeinsamen Winkelgeschwindigkeit ω um den gemeinsamen Schwerpunkt sich bewegen (221), daß $mr^2\omega + m_0 r^2 (m/m_0)^2 \omega = r^2(m + m^2/m_0)\omega$ unveränderlich ist und also, bei der Unveränderlichkeit der Massen m und m_0, wieder $r^2\omega$ unveränderlich.

Beim Wirken äußerer Kräfte, die ein Drehmoment um den Schwerpunkt ergeben, würde $r^2\omega$ nach dem Flächensatz veränderlich sein und also Keplers 2. Gesetz nicht gelten. Es ist dies ein Fall, dessen wir schon vorher gedacht haben (Note zu 226); es würde dann gleichzeitig, nach dem Schwerpunktssatz (227), auch der Schwerpunkt eine Beschleunigung erleiden entsprechend der an ihn verlegt zu denkenden äußeren Kraft.

233. Ein anderes, wichtiges Beispiel ist das einer rotierenden, sich selbst überlassenen Masse, welche durch innere Kräfte sich zusammenzieht. Der Fall liegt bei allen Himmelskörpern vor, die Wärmeverluste durch Ausstrahlung unterworfen sind; die mit der Erkaltung verbundene Zusammenziehung erfolgt dann durch die inneren Gravitationskräfte der Teile der Masse selbst. Es muß dabei, wegen des Fehlens äußerer Kräfte, $M\omega$ konstant bleiben. Da aber die Einzelmassen bei der Zusammenziehung sich der Achse nähern, sinkt das Trägheitsmoment M; im selben Maße muß daher die Winkelgeschwindigkeit ω steigen.

Alle rotierenden, in Zusammenziehung begriffenen Massen beschleunigen also ihre Drehbewegung. Dies trifft auch die Erde, allerdings wegen schon sehr weit vorgeschrittener Erkaltung jetzt nur in sehr geringem Maße; doch ist dies wohl ohne Zweifel die beschleunigende Ursache, welche, entgegen der verzögernden Flutreibung (225), bisher noch die Sekunde als genügend unveränderliche Zeiteinheit erscheinen läßt.

Weit erheblicher muß die Drehbeschleunigung bei Massen sehr hoher Temperatur sein, oder überhaupt bei Massen die noch starker Zusammenziehung fähig sind, wie es viele der größten Massen im Himmelsraum sind. Das Steigen der Geschwindigkeit muß auch die Fliehkraft am Äquator dieser Massen steigern, was große Abplattungen zur Folge haben muß (vgl. 203) und auch Abtrennung von Massen hervorbringen kann[1]). Viele Gebilde dieser Art sind als Spiralnebel bekannt (vgl. 226); bei günstiger Lage ihrer Äquatorebene ist ihre starke Abflachung gut ersichtlich (Abb. 54[2])). Ihre Abmessungen gehen bei den in vielen Fällen sehr erheblichen scheinbaren Größen, verbunden mit sehr großen Abständen, in die Tausende von Lichtjahren; sie sind Systeme von gleicher Größe wie das Milchstraßensystem, welchem unsere Sonne angehört, von diesem durch ungeheure Zwischenräume getrennt (vgl. O 27). Manche dieser von der Kante

---

[1]) Die Fliehkraft am Äquator steigt nach einfachster Überlegung bei der Zusammenziehung stärker als die Gravitation an der Oberfläche.

[2]) Nach einer Aufnahme des Lick-Observatoriums.

gesehenen Spiralnebel zeigen sich von einem schmalen dunkeln Ring umgeben, der wohl Anhäufung nach außen gewanderter, schon erkalteter Massen ist.



Abb. 54. Nebel im Sextanten.

Der Einfluß von Flutkräften bei den Abtrennungen, die in der Äquatorebene stattfinden, sowie die weitere Abwanderung der abgetrennten Teile wurde bereits oben überlegt (226). Es sind dies alles Vorgänge, die bei der Größe der in Betracht kommenden Massen auf ungeheure Zeiträume sich erstrecken, so daß die astronomische Forschung nur Augenblicksbilder liefert und noch viele Fragen übriglassen muß; doch ist nicht zu bezweifeln, daß mit dem Erkannten einiger Einblick in die Entstehungsgeschichte von Sonnen-, Planeten- und Mondsystemen gewonnen ist.

Kreisel.

234. Noch eine Eigentümlichkeit in Drehung befindlicher Massen ist zu beachten, die besonderste, nämlich das Richtungs-Beharren freier Achsen.

Wir sahen schon (215 u. f.), daß in Drehung befindliche Körper ohne Wirkung äußerer Kräfte nur Schwerpunktsachsen haben können und daß bei freier Wahl der Achsenrichtung die Schwerpunktsachse größten Trägheitsmoments sich einstellt, und wir nannten eine solche Achse, die der Körper ohne äußere Kräfte beibehält, „freie Achse“ (222). Einen Körper, der für Drehung um eine solche Achse eingerichtet ist, nennen wir „Kreisel“[1]).

Gewöhnlich ist der Kreisel symmetrisch um eine Achse gearbeitet, die von vornherein zur Schwerpunktsachse größten Trägheitsmoments bestimmt ist und die dann freie Achse ist, und meist hat er eine Spitze, auf der man ihn unterstützen kann; liegt die Spitze richtig in der freien Achse des Kreisels, so beeinflußt diese Unterstützung seine Drehung nicht. Abb. 55 zeigt eine einfachste Kreiselform, bestehend aus einer massigen Bleischeibe mit stählerner, unten gespitzter Achse.

235. Stabilität der Kreiselachsen. — Bei einem Kreisel in Glockenform kann man die Spitze im Schwerpunkt anbringen, da dieser in der Höhlung der unten offenen Glocke sich befindet. Stellt man einen solchen Kreisel mit der Spitze auf das obere (etwas gehöhlte) Ende eines senkrecht befestigten Stabes, so ist er in indifferentem Gleichgewicht (111)[2]). Er ist dann der Wirkung

[1]) Es sind auch allgemeiner gefaßte Definitionen von „Kreisel“ in Gebrauch; die obige faßt die hervortretendsten Besonderheiten aller Arten von Kreiseln in sich. Um Kreisel zu haben, die von Störungen möglichst unbeeinflußt bleiben, wählt man Körperformen, die Achsen besonders hervortretend größten Trägheitsmoments geben; doch kann auch eine Kugel, deren Schwerpunktsachsen alle gleiches Trägheitsmoment haben, Kreisel sein.

[2]) Man kann statt Unterstützung auf einer im Schwerpunkt angebrachten Spitze auch sog. kardanische Aufhängung benutzen; das wesentliche ist die für indifferentes Gleichgewicht geltende Bedingung, daß keine mögliche Verrückung den Schwerpunkt hebe oder senke, und außerdem hier: daß Drehung um den Schwerpunkt in jeder beliebigen Richtung möglich sei.

äußerer Kräfte entzogen. Rotiert er nicht, so nimmt er auf seiner Spitze stehend leicht jede Achsenrichtung an. Ist er aber in Drehung versetzt worden, so behält er nicht nur eine einmal bestehende Achsenrichtung bei — was nur dem indifferenten Gleichgewicht entsprechen würde —, sondern er zeigt auch ein höchst auffallendes Verhalten Kräften gegenüber, die die Achsenrichtung abzuändern streben. Der schnell rotierende Kreisel verträgt bei einiger Masse starke Stöße ohne daß seine Achsenrichtung sich ändert.

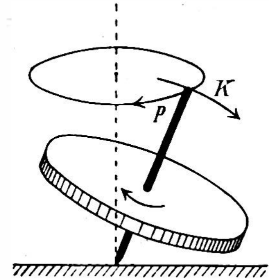


Abb. 55. Präzessionsbewegung.

Dasselbe zeigt aber auch ein gewöhnlicher, außer dem Schwerpunkt unterstützter Kreisel, wie z. B. der in Abb. 55 dargestellte. Man kann ihm bei schneller Rotation grobe Schläge mit einem Holzstück erteilen, ohne daß mehr erfolgt, als daß er auf seiner Spitze auf ebener Unterlage ein wenig zur Seite gleitet. Ohne seine Drehung würde der Kreisel Abb. 55 sogar schon durch Wirkung der Schwere allein umfallen, da sein Schwerpunkt über der Spitze sich befindet.

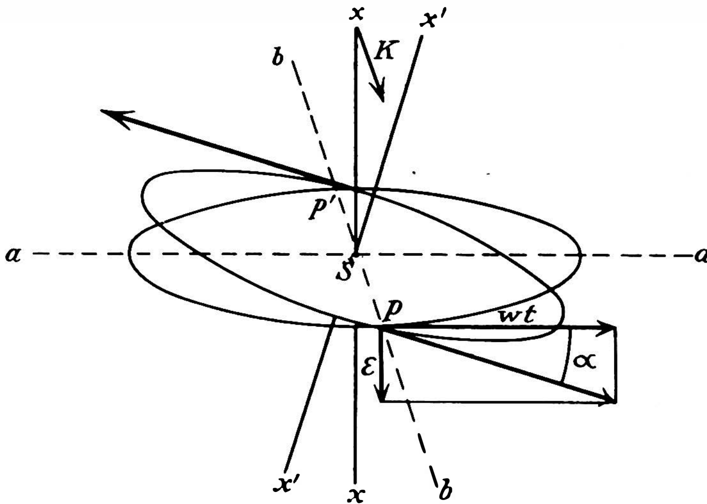


Abb. 56. Querausweichen der Kreiselachse.

236. Querausweichung der Kreiselachsen. — Läßt man dauernd eine Kraft wirken, welche die Kreiselachse in andere Richtung zu bringen strebt, so findet man, daß keine Beschleunigung in Kraftrichtung erfolgt, sondern ein Ausweichen senkrecht zur Kraftrichtung. Man beobachtet dieses Querausweichen sehr einfach an jedem Kreisel, wie Abb. 55, dessen Achse nicht senkrecht steht. Es wirkt dann die Schwere, die ihn in Richtung des Pfeiles K umzustürzen sucht. Er stürzt aber nicht um, sondern seine Achse weicht in Richtung des Pfeiles p quer aus, und da die Schwerewirkung im Sinne des Umstürzens andauert, dauert auch das Querausweichen an, so daß das obere Achsenende die in der Abbildung angedeutete Kreisbahn beschreibt.

Man kann das Querausweichen leicht verstehen und auch die Geschwindigkeit der Querbewegung berechnen, wenn man die gegebene Drehung des Kreisels zusammensetzt mit der als Folge der äußeren Kraft hinzukommenden Drehung.

Es sei der Kreisel Abb. 56 im Schwerpunkt S unterstützt und es wirke eine Kraft K auf seine Achse xx, die deren oberes Ende nach vorn zu bewegen strebt. Dadurch erfährt der Kreisel ein Drehmoment D um eine Achse aa. Ein augenblicklich vorn befindlicher Punkt p an seinem Rande wird dadurch nach unten bewegt und muß in der sehr kleinen Zeit t, während welcher der Punkt sich dort befindet, den Weg ε zurücklegen, dessen Größe in Winkelmaß um die Achse aa gerechnet (134, 184) $\varepsilon = \beta t^2/2 = (D/M_a)t^2/2$ ist. In derselben Zeit t bewegt sich aber p infolge der Kreiselrotation, deren Winkelgeschwindigkeit ω sei, um den Winkel ωt um die Achse xx weiter. Bei der Kleinheit von t können beide Bewegungen als gradlinig betrachtet und nach dem Parallelogrammsatz zusammengesetzt werden, wie es die Abbildung darstellt[1]). Der Punkt p wird also in Richtung der Diagonale bewegt sein müssen; er wird um den Winkel α nach unten abgelenkt, ein ihm diametral entgegengesetzter Punkt p′ aus gleichem Grunde nach oben. Dies kann aber wegen der Festigkeit des Kreiselkörpers nur erfolgen, wenn der ganze Kreisel sich schief stellt, so daß seine Achse xx ebenfalls um den Winkel α gedreht wird und zwar um die Achse bb, welche senkrecht zu aa steht. Während also das wirkende Drehmoment D das obere Achsenende nach vorn drückt, wendet sich die Achse tatsächlich quer dazu, nämlich (beim angenommenen Drehsinn des Kreisels) nach rechts. Diese Wendung erfolgt proportional der Zeit, d. i. mit gleichbleibender Winkelgeschwindigkeit; denn es ist $\alpha = \varepsilon/\omega t = Dt/2M_a\omega$, wobei tg $\alpha = \alpha$ gesetzt ist, was bei der beliebigen Kleinheit von t zutrifft[2]). Die Winkelgeschwindigkeit $\omega' = \alpha/t$, mit welcher die Wendung erfolgt, ist demnach $\omega' = D/2M_a\omega$. M_a ist hierin das Trägheitsmoment des Kreisels um die zu ε gehörige Achse aa. Ist der Kreisel in der Hauptsache eine flache Scheibe, so ist (nach Gl. 181) M_a die Hälfte seines größten, um seine Drehachse xx geltenden Trägheitsmoments M. Somit ist die Winkelgeschwindigkeit der Querausweichung

$$\omega' = \frac{D}{M\omega}. \qquad 236)$$

Die Querausweichung wird demnach dem wirkenden Drehmoment D proportional, jedoch um so langsamer erfolgen, je größer die Drehbewegungsgröße $M\omega$ ist. Letztere ist demnach maßgebend für das, was man bei Drehbewegung die „Steifigkeit" der Achse nennen könnte, ebenso wie die Bewegungsgröße

[1]) Wir berühren hier die Ableitung eines für einfache Behandlung verwickelter Fälle von Drehbewegung wichtigen allgemeinen Satzes für Zusammensetzung gleichzeitig vorhandener Drehbewegungen. Der Satz lautet ähnlich dem für fortschreitende Bewegungen geltenden Parallelogrammsatz (43): Man trage die Drehwinkel (bzw. Winkelgeschwindigkeiten, Winkelbeschleunigungen, welche alle Vektorgrößen sind) als Strecke, jede in ihre Achsenrichtung von beliebigem Punkte aus auf und vereinige oder zerlege sie in geometrischer Weise, um resultierende Winkelgeschwindigkeiten (bzw. -beschleunigungen) oder Komponenten in Gestalt von Strecken zu erhalten. Das Obige zeigt in einem Sonderfall, wie dieser Satz begründet werden kann.

[2]) Allerdings nicht wenn $D/2M_a\omega$ beliebig groß wäre. Dies bedeutet, daß die obige, einfache Rechnung auf beliebig langsame Kreiseldrehung ($\omega = 0$) nicht anwendbar ist.

mv maßgebend ist für die „Steifigkeit" der Bahn einer mit der Geschwindigkeit v in fortschreitender Bewegung befindlichen Masse m.

Die Gl. 236 zeigt auch, daß die Querausweichung (ω') ihren Richtungssinn umkehrt, wenn das Drehmoment (D) oder die Kreiseldrehung (ω) gewendet wird.

237. Präzession. — Man sieht nun unmittelbar ein, daß ein schiefstehender, außerhalb des Schwerpunkts unterstützter Kreisel, wie Abb. 55, welchen die Schwerkraft in Richtung des Pfeils K umzustürzen strebt, stets quer dazu ausweichend, mit seiner Achse einen Kegelmantel beschreiben muß, wie es der obere Kreis in der Abbildung andeutet[1]). Man nennt dies die Präzessionsbewegung eines Kreisels; sie tritt immer ein, wenn dauernd ein Drehmoment wirkt, das die Achse nach einer festen Richtung hin (oder von solcher weg) zu bringen strebt. Das Auffallende ist, daß diese Richtung nicht erreicht, sondern nur umkreist wird.

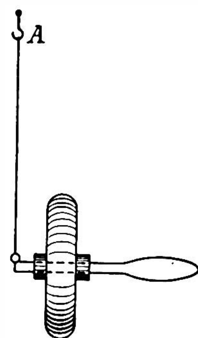


Abb. 57.
Aufgehängter Kreisel.

Besonders tritt dies im Beispiel des aufgehängten Kreisels, Abb. 57, hervor, dessen horizontal stehende Achse nur die Präzessionsbewegung um den Aufhängefaden als Achse ausführt ohne etwa herabsinkend die horizontale Ebene zu verlassen. Selbst die Einstellung des Schwerpunktes senkrecht unter den Aufhängepunkt A des Ganzen unterbleibt (denn es müßte hierzu bei Parallelverschiebung der Achse der Schwerpunkt gehoben werden, was die Schwere nicht bewirkt).

238. Kreiseleigenschaften sind nur Trägheitswirkung. — Daß die Achse eines rotierenden Körpers trotz freier Beweglichkeit dauernd einer richtungsändernden Kraft ausweichen kann, ja daß der ganze Kreiselkörper der Wirkung der Schwerkraft wie entzogen scheinen kann, ist gewiß erstaunlich, ist aber nur Wirkung der Trägheit und ist daher nur ebenso erstaunlich als eben die Trägheitseigenschaft der Materie. Man betrachte ein Fadenpendel, dessen Kugel durch geeigneten Anstoß in Kreisbewegung um die Ruhelage versetzt ist. Bei diesem „Kreispendel" oder „Kegelpendel" scheint die Schwere auch ohne Wirkung zu bleiben; die Kugel sinkt dauernd nicht in die Ruhelage herab, sondern umkreist dieselbe nur. Es erfolgt dies hier ohne Drehbewegung der Kugel, die nur Parallelverschiebung — rein fortschreitende Bewegung — längs der Kreisbahn ausführt. Es ist in diesem Falle bereits klar (194), daß die Zentrifugalkraft es ist, welche der Schwere dauernd das Gleichgewicht hält, was aber nichts anderes bedeutet, als daß die Trägheitswirkung dauernd mit der Beschleunigungswirkung der Schwerkraft sich zusammensetzt, so die Kreisbahn ergebend (193). Man sieht, daß es nur die Trägheit ist, die die Schwerkraft verhindert, nicht zwar zu wirken, aber Arbeit zu leisten; letzteres deshalb, weil (bzw. insofern als) in Kraftrichtung keine Verschiebung eintritt. Dasselbe ist auch bei dem in Präzessionsbewegung begriffenen Kreisel der Fall, wie unsere

[1]) Die Abbildung gilt für den Fall, daß die Spitze, auf welcher der Kreisel steht, festgehalten ist (etwa in einer kleinen Vertiefung der Unterlage); kann sie gleiten (oder rollen), so wird der Schwerpunkt des Kreisels es sein, der in Ruhe bleibt (217, wie in der Rechnung 236 und Abb. 56 angenommen) und der die Spitze des Kegels abgibt, welchen die Achse beschreibt.

obige Überlegung (236) zeigte. Doch ist Drehbewegung stets schwerer zu überblicken als fortschreitende Bewegung, und man bedarf deshalb bei Behandlung einigermaßen verwickelter Fälle von Drehbewegungen meist der Rechnung, wenn sie in allen Einzelheiten quantitativ verfolgt werden sollen. Die Rechnung geht aber nur mit Gleichungen vor sich, deren Inhalt nicht über die von uns behandelten Grundgesetze (Galileis und Newtons Bewegungsgesetze, ungestörte Übereinanderlagerung von Bewegungen verschiedenen Ursprungs, Energiegesetz) hinausgeht. Es ist daher nichts Grundsätzliches zu vermissen, wenn wir auf Kreisel-, sowie Drehbewegung überhaupt hier nicht viel weiter eingehen [1]). Nur einige, aus den bereits vorgebrachten einfachen Überlegungen ohne weiteres folgende Besonderheiten seien noch kurz betrachtet.

239. Kreisel unter dem Einfluß von Reibung. Wird ein Kreisel an seiner Präzessionsbewegung irgendwie gehindert, etwa durch Reibung, so beginnt er dem wirkenden Drehmoment zu folgen. Beispielsweise sinkt dann die Achse des Kreisels, Abb. 55 oder 57, und sie sinkt schnell, wenn die Präzessionsbewegung ganz aufgehalten wird. Dies ist als Folge des Hinzutretens der hindernden Kraft unmittelbar einzusehen, wenn man bedenkt, daß die Richtung dieser Kraft der der Präzessionsbewegung entgegengesetzt ist und daß auch gegenüber dieser Kraft Querausweichung erfolgt. Wird die Präzessionsbewegung durch Hinzutreten einer Kraft beschleunigt, so richtet sich der Kreisel entgegen der Schwere auf, was ebenso als Querausweichen einzusehen ist.

Hierauf beruht auch das allmähliche Sichaufrichten des Kreisels Abb. 55, falls seine Spitze nicht festgehalten wird. Die Spitze bewegt sich dann auf der Unterlage im Kreise herum (vgl. Fußnote zu 237); tut sie dies wegen Reibung an der Unterlage rollend, so wird die Präzessionsbewegung auf Kosten der Drehbewegung des Kreisels beschleunigt, und dies ergibt die Aufrichtung.

240. Die Erde als Kreisel. — Kreisel in großem Maßstabe sind alle um ihre Schwerpunktsachsen sich drehenden Himmelskörper, wie die Erde. Wegen der mit der Drehung verbundenen Abplattung gehört allen diesen Achsen ein größtes Trägheitsmoment zu, und jede derselben behält deshalb unveränderlich ihre Richtung, falls kein äußeres Drehmoment wirkt (235 u. f.).

Die Erdachse steht bekanntlich nicht genau senkrecht zur Erdbahnebene (Ekliptik), sondern mit einem Winkel von 23·5° schief, welches somit auch der Winkel zwischen Erdäquator und Bahnebene ist („Schiefe der Ekliptik"). Mit dieser Schiefe bleibt die Erdachse sich selbst parallel, während die Erde um die Sonne läuft. Die Folge davon sind die regelmäßig wiederkehrenden Jahreszeiten. Wenn das Nordende der Achse der Sonne zugekehrt ist, hat die nördliche Erdhalbkugel Sommer, die südliche Winter, und ein halb Jahr später ist es umgekehrt, da dann das Nordende der Erdachse von der Sonne abgewendet ist. Zwischendurch sind zweimal im Jahr, im Frühling und im Herbst, beide Pole gleichweit ab von der Sonne, so daß die Schattengrenze auf der Erdkugel durch die Pole geht. Es ist dann auf der ganzen Erde Tag- und Nacht-Gleiche („Äquinoktien"; 21. März und 23. September).

Das Sichparallelbleiben der Erdachse zeigt sich unmittelbar daran, daß es stets dieselbe Stelle des Sternhimmels ist, welche bei dessen scheinbarer täglicher Drehung stillsteht. Nahe dieser Stelle befindet sich einer der Sterne des „Kleinen Bären", deshalb „Polarstern" genannt. Derselbe liegt somit nahezu in der

[1]) Mathematiker haben sich in teils mehrbändigen Werken über den Kreisel und seine Verallgemeinerungen verbreitet. Sie versäumen dabei nur anzugeben, was ihre Gleichungen im einzelnen bedeuten, als wüßten sie das selber nicht oder als käme es nur darauf an, mittels Rechnung möglichst alles zu umfassen, was überhaupt vorkommen kann ohne Behandlung der Frage, wann Dieses oder wann Jenes eintreten wird.

(nördlichen) Verlängerung der Erdachse, und wegen seines sehr großen Abstandes von uns macht dabei die Verschiebung der Erde in ihrer Bahn nichts aus; er ist stets Polarstern, sofern die Erdachse sich selbst parallel bleibt.

241. Vorrücken der Tag- und Nacht-Gleichen. — Das Parallelbleiben der Erdachse trifft jedoch nicht völlig genau zu; im Laufe langer Zeiten ist eine Abweichung bemerkbar geworden. Die Erdachse beschreibt in der Tat einen Kegel wie der Kreisel Abb. 55; doch dauert es rund 26000 Jahre, bis der Kegel einmal durchlaufen wird. Die Achse des Kegels steht senkrecht zur Ekliptik (Erdbahnebene); sein Öffnungswinkel beträgt 47°, 2mal die Schiefe der Ekliptik. Diese Kegelbewegung der Erdachse ist durch ein ständig wirkendes Drehmoment verursacht, welches die Erdachse senkrecht zur Ekliptik zu stellen strebt. Diesem Drehmoment weicht die Achse ständig seitlich aus; daher die Kegelbewegung (237). Das Drehmoment wird von Mond und Sonne ausgeübt ähnlich wie die Flutkräfte (223), und deshalb trägt auch hier der Mond den größeren Teil bei. Doch handelt es sich hier nicht um die auf das Wasser der Erde ausgeübten Kräfte, sondern es kommt die Ellipsoidform der Erde zur Wirkung. Die Erde kann als Kugel mit einem um den Äquator gelegten Wulst betrachtet werden, und auf die dem Mond zu-, bzw. abgewandten Teile des Wulstes wirken diese dem Mond zu-, bzw. abgewandten Kräfte. Sie geben ein Drehmoment, weil der Äquator schief zur Mondbahnebene steht (die nur um 5° von der Ekliptik abweicht), und dieses Drehmoment ist es, welches die Erdachse dauernd senkrecht zur Mondbahnebene bzw. zur Ekliptik zu stellen sucht und welches somit die Kegelbewegung der Erdachse hervorbringt[1]). Auch dies ist zuerst von Newton eingehend gezeigt worden.

Zur Beobachtung kam die Kegelbewegung der Erdachse im Laufe der Jahrhunderte zuerst durch ein immer mehr verfrühtes Eintreten der Tag- und Nacht-Gleichen („Präzession der Äquinoktien"; daher auch der Name Präzessionsbewegung für die Kegelbewegung eines Kreisels). Man sieht ein, daß nach halber Durchlaufung des Präzessionskegels, d. i. nach 13000 Jahren alle Jahreszeiten vertauscht sein müssen. Steht dann die Erde wieder an gleicher Stelle ihrer Bahn, was leicht daran erkannt wird, daß die Sonne wieder im selben Sternbild steht oder daß zur Mitternacht wieder dasselbe Sternbild seinen Höchststand hat, so ist doch statt Sommer Winter und statt der Tag- und Nacht-Gleiche des Frühlings die des Herbstes eingetreten. Die Zwischenzeit zweier gleicher Jahreszeiten, z. B. zweier Frühlings-Tag- und Nacht-Gleichen — das „tropische Jahr" — ist daher um $^1/_{26000}$ Jahr = 20 Minuten kürzer als die Umlaufszeit der Erde um die Sonne, das „siderische Jahr". In einem Jahrtausend macht dieses Voraneilen der Jahreszeiten schon 14 Tage aus. Weil die Tätigkeit der Menschen nach den Jahreszeiten sich einrichtet, liegt dem gebräuchlichen Kalender mit seinen Monatslängen und Schalttag-Einrichtungen nicht das wahre oder siderische, sondern das tropische Jahr zugrunde.

242. Von technischen Anwendungen des Kreisels seien die „gezogenen" Geschütze und der Kreiselkompaß genannt.

Bei den Geschützen schneidet man im Inneren des Rohres steile Schraubengänge ein, um dem Geschoß beim Abfliegen eine Winkelgeschwindigkeit um seine Längsachse beizubringen.

---

[1]) Die nicht genaue Übereinstimmung zwischen Mondbahnebene und Ekliptik hat kleine Schwankungen der Präzessionsbewegung der Erdachse zur Folge, welche man „Nutationen" nennt.

Diese Achse des Geschosses bleibt dann auf seiner Flugbahn sich selbst parallel, was wegen des geringen Luftwiderstandes beim dauernden Voranfliegen der Geschoßspitze erwünscht ist. Wegen der parabolischen Krümmung der Flugbahn wird die Spitze allmählich etwas nach oben von der Bahnrichtung abweichen müssen, und dies hat vermehrten Luftwiderstand von unten her zur Folge. Dieser Widerstand würde das Geschoß bald querdrehen, mit der Spitze nach oben, wenn es nicht rotierte. Die Rotation ergibt statt dieser ganz unerwünschten Wirkung nur eine Präzessionsbewegung des Geschosses, welche als Seitenabweichung (nach rechts wenn die Geschoßdrehung nach rechts gerichtet war) merklich wird, die beim Zielen berücksichtigt werden muß. Die Präzessionsbewegung kann erwünschterweise bis zur Abwärtsrichtung der Spitze des Geschosses sich fortsetzen, zu günstigem Auftreffen am Ziel.

Der Kreiselkompaß besteht in der Hauptsache aus einem als Kreisel ausgebildeten Elektromotor mit horizontaler Achse, gelagert in einer Büchse, die um eine vertikale Achse drehbar ist und an welcher oben die Kompaß-Scheibe befestigt ist. Da diese vertikale Achse samt Kreiselbüchse mit der Erde sich dreht, wird die Kreiselachse quer ausweichen, bis sie der Erdachse möglichst parallel wird, d. i. Nord-Südrichtung annimmt, was die Büchse mit ihrer Kompaßscheibe mitmacht und wonach die letztere immer richtig zeigt. Man sieht diese Wirkung unmittelbar aus Abb. 56 und der dazugehörigen Überlegung ein (236). Ein Kreisel der um eine andere als seine eigene Achse gedreht wird, strebt stets letztere der ersteren parallel zu stellen, was nur Folge des Querausweichens ist. In Abb. 56 war eine Drehung um die Achse a a angenommen, und man sah, daß die Kreiselachse x x, querausweichend, eben der Richtung von a a sich zuwendet, die sie auch ganz erreicht, wenn das Drehmoment die Achse a a beibehält. Der Kreiselkompaß hat große Wichtigkeit erlangt, weil die Magnetnadel auf allen eisernen Schiffen versagt oder unzuverlässig wird (E 261).

243. Drehbewegung absolut erkennbar. — Ein Kreisel, im Schwerpunkt unterstützt und äußeren Drehmomenten entzogen, verharrt mit seiner Achse in fester, sich selbst parallelbleibender Richtung, wie wir sahen (235 u. f.). Er ist somit ein Mittel eine feste Richtung im Raume aufrechtzuerhalten. Erscheint irgendwo in der Umwelt des Kreisels eine Drehung, so erkennt man das Gedrehte eindeutig beim Vergleich mit der ohne Drehung verharrenden Kreiselachse. Man kann also Drehbewegung absolut, d. h. unabhängig von willkürlich als nicht gedreht angenommenen Vergleichsgegenständen erkennen. Die Kreiselachse ist kein willkürlich als fest angenommener Richtungszeiger, sondern ihre Richtungsfestigkeit liegt in der Natur der Dinge. Wir sahen, daß diese Richtungsfestigkeit der Kreiselachse nur Folge der Trägheit ist (238), daß sie also sogar nichts weiter ist als die Richtungsfestigkeit, die man auch an jedem in fortschreitender Bewegung befindlichen Körper findet, der vermöge seiner Trägheit auf gradliniger Bahn zu bleiben strebt und auch auf dieser bleibt, wenn keine äußere Kraft auf ihn wirkt. Jeder solcher Körper ist schon ebenso wie die Kreiselachse ein fester Richtungszeiger. Man sieht, daß es im Grunde nur die als allgemeine Eigenschaft aller Materie (allgemeiner gesagt: aller Energie) erkannte, in der Natur der Dinge liegende Eigenschaft der Trägheit ist, welche die absolute Erfassung einer festen Richtung im Raume ermöglicht und sichert. Eine feste Richtung können wir also haben; einen festen Punkt im Raume zu finden gelang nicht, wie wir sahen (46). Es könnte sein (und gegenwärtige Kenntnis spricht dafür), daß das Letztere sogar eine in der Natur der Dinge liegende Unmöglichkeit bedeutet, ebenso wie das Erstere durch die Natur der Dinge gegeben ist[1]).

244. Foucaults Pendel. — Der Verwirklichung der festen Richtung durch einen allen Drehmomenten entzogenen Kreisel steht auch kein praktisches Hindernis

[1]) Auch die Benutzung der Lichterscheinungen erlaubt absolute Feststellung von Drehung (O 25), nicht aber von fortschreitender Bewegung.

im Wege. Schon die Erde selbst ist mit großer Annäherung ein solcher Kreisel, und ihre Achse weist die feste Richtung mit entsprechender Annäherung, wie wir sahen (240, 241).

Der Gedanke, einen Kreisel zu benutzen, um Drehung absolut nachzuweisen, im besonderen die tägliche Drehung der Erde augenscheinlich zu machen, wurde schon in den Jahren vor 1850 von Foucault verfolgt; doch war es damals zu schwierig etwas wie den heutigen Kreiselkompaß zu verwirklichen, der die Erddrehung nicht nur nachweist, sondern sogar auch dauernd die Richtung der Achse anzeigt. Foucault zog es vor, ein Pendel von großer Länge zu benutzen, das wegen der Langsamkeit seiner Bewegung wenig dem Einfluß der Reibung unterliegt, besonders wenn es eine sehr große Masse hat. Hierbei kommt einfach die Trägheit der fortschreitenden Bewegung zur Wirkung. Die Schwerkraft zusammen mit der elastischen Kraft des Aufhängedrahtes ergibt keine senkrecht zur Schwingungsebene des Pendels gerichtete Komponente; deshalb bleibt die Schwingungsbahn der Pendelmasse dauernd gleichgerichtet in ihrer Vertikalebene. Schwänge das Pendel über dem Nordpol der Erde, so würde die Erddrehung in voller Größe sich zeigen, indem die Schwingungsbahn mit der halben Geschwindigkeit des Stundenzeigers einer Uhr (der bekanntlich zweimal im Tage umläuft) um ihren Mittelpunkt sich zu drehen schiene und zwar im Uhrzeigersinn, weil die Erddrehung für einen am Nordpol befindlichen Beobachter im entgegengesetzten Uhrzeigersinn vor sich geht. In beliebigen geographischen Breiten kommt nur eine Komponente der Erddrehung zur Geltung, weil das Pendel nur Drehungen um seine Ruhelage als Achse anzuzeigen vermag. Die in dieser, d. i. in der Lotrichtung liegende Drehkomponente der Erde ist gegeben durch den Sinus der geographischen Breite[1]), der somit zu der am Pol geltenden Drehgeschwindigkeit der Pendelbahn als Faktor hinzutreten muß. Dies bestätigte sich auch mit aller zu erwartenden Genauigkeit.

Der sozusagen handgreifliche Nachweis der täglichen Drehung der Erde war damit gelungen, 300 Jahre nach Kopernikus' Gedankennachweis und 200 Jahre nachdem noch Galilei für den Gedanken verdammt worden war. Mit heutiger Gesamtkenntnis erscheint die Annahme einer Drehung aller Welt in 24 Stunden um die Erde vollkommen wirklichkeitsfern[2]).

245. Lichtstrahl. — Der einfachste Fall von Richtungsfestigkeit infolge von Trägheit liegt bei einem Lichtstrahl vor, der die mit Lichtgeschwindigkeit bewegte Masse der Energie des Lichtes enthält. Wegen der sehr großen Geschwindigkeit erfährt ein Lichtstrahl durch die auf seine Energie wirkenden Gravitationskräfte auch größter Himmelskörper nur sehr geringe Ablenkungen (O 15, vgl. auch E 437, 582, 590). Man kann die „Aberration" als einen Nachweis der jährlichen und auch der täglichen Drehung der Erde mittels der Richtungsfestigkeit des Lichtstrahles ansehen (O 25).

---

[1]) Dies ist der Kosinus des Winkels zwischen Erdachse und Lotrichtung, entsprechend dem in der Note zu 236 erwähnten Satz für die Zusammensetzung von Drehungen.

[2]) Es müßte schon der nächste Fixstern (mit etwa 4.5 Lichtjahren Abstand) mit 10000-facher Lichtgeschwindigkeit seinen Kreis beschreiben. Da im Himmelsraum dieselben Bewegungsgesetze als gültig nachgewiesen sind, wie auf der Erde (205 u. f.), wären zu solchen Kreisbewegungen nach der Erde hin gerichtete große Kräfte nötig, die proportional dem Abstand von der Erde wachsen (Gl. 196a), deren Bestehen aber aller Kenntnis widerspricht. Über den Charakter von Gedankenversuchen mit gedrehter Welt s. Note zu 86.

V. Besondere Mechanik der drei Zustände der Materie.

Molekularkräfte.

246. Was von hier ab für die Mechanik noch übrig bleibt, ist die Untersuchung noch weiterer Kraftarten und der besonderen Erscheinungen, welche sie hervorbringen.

Hierher gehören vor allem die Molekularkräfte, auf deren Mitwirkung wir schon öfter verwiesen, die aber nun besonders zu betrachten sind. Es sind das die Kräfte, welche die Moleküle in den festen Körpern zusammenhalten, welche die elastischen Eigenschaften der festen Körper ergeben und auf deren Besonderheiten auch die so auffallende Verschiedenheit der drei Zustände, „Aggregatzustände" der Materie — fest, flüssig, gasförmig — beruht.

Wir unterscheiden die Molekularkräfte, die von Molekül zu Molekül wirken, von den Atomkräften, welche die Atome in den Molekülen zusammenhalten und die daher auch „chemische Kräfte" genannt werden. Wo allerdings die Atome gar keine gesondert beweglichen Gruppen bilden, wie es bei Elementen („einatomigen" Gasen W 114, festen Metallen W 119), aber auch bei festen Verbindungen (W 120) vorkommt, kann „Atom" und „Molekül" zuweilen auch als gleichbedeutend angesehen werden (vgl. 250).

Wir stellen hier die für alle drei Aggregatzustände geltenden Eigenschaften der Molekularkräfte voran und betrachten dann deren Wirkungen bei den drei Zuständen gesondert.

Dabei wird sich auch zeigen, daß die allgemeinen Sätze der Mechanik, welche hauptsächlich aus Erfahrungen an festen Körpern abgeleitet waren, tatsächlich für alle Materie, beliebigen Aggregatzustandes gelten.

247. Molekularkräfte verschieden von Gravitation. — Die erste Frage ist, ob diese von Molekül zu Molekül wirkenden Kräfte, deren augenscheinliches Bestehen die Festigkeit — der Zusammenhalt — der festen Körper ohne weiteres zeigt[1]), überhaupt etwas anderes sind als vielleicht nur die allen Massen zugehörige Gravitationskraft, die auch bei jedem Molekülpaar zu erwarten ist. Schon Newton hat diese Frage erwogen und dahin beantwortet, daß die Molekularkräfte etwas Besonderes, von der Gravitation Verschiedenes sind.

Berechnet man die Gravitation beispielsweise für zwei Kupferatome, die bis fast zur Berührung, wie im festen Kupfer einander genähert sind, d. i. auf etwa $1{\cdot}5 \cdot 10^{-8}$ mm von Mittelpunkt zu Mittelpunkt, so findet man nur etwa 10^{-41} gr Kraft. Die bekannte Zugfestigkeit des Kupfers zeigt dagegen eine etwa $2 \cdot 10^{30}$mal so große Kraft von Atom zu Atom wirken. Die Gravitation ist

---

[1]) Galilei betrachtete noch die Möglichkeit, daß der Zusammenhalt der festen Körper durch den von außen her wirkenden Druck der Luft verursacht sein könnte, über welchen er schon vor Guericke richtige Vorstellungen hatte. Die heute genau bekannte Größe dieses Druckes zeigt — wie übrigens auch schon Galilei dachte — daß er viel zu klein ist.

überhaupt eine Kraft, die nur bei sehr großen Massen erheblich wird (214), während die Molekularkräfte gerade bei kleinen Massen besonders hervortreten.

Es hat dies seinen Grund in dem sehr verschiedenen Abstandsgesetz der beiden Kraftarten, wodurch sie allein schon gänzlich verschieden voneinander sich zeigen. Während die Gravitation nach dem Quadratgesetz nur ganz allmählich in die Entfernung abnimmt, ist für die Molekularkräfte eine sehr plötzliche Abnahme bei Überschreitung eines gewissen Abstandes charakteristisch. Hat man einen festen Körper zerbrochen, so ist es im allgemeinen nicht möglich, die Bruchstücke wieder aneinander haften zu lassen. Man kann die an den Bruchflächen liegenden Moleküle nicht wieder so nahe aneinanderbringen als sie vor dem Bruch waren, weil die Bruchflächen meist etwas verbogen sind oder weil sie mit Feuchtigkeits- und Gasschichten sich überziehen. Nur bei weichen Körpern, wie Blei, gelingt es ohne Anwendung außerordentlicher Kräfte (299) wieder ein Haften zu bewirken; die Moleküle sind hier leicht verschieblich und kommen daher leicht wieder zu genügender Annäherung. Auf der Zuhilfenahme zeitweilig leichter Beweglichkeit zwecks genügender molekularer Annäherung beruht alles Schweißen, Löten, Kitten, Leimen.

248. Wirkungsweite. — Man entnimmt aus solchen Erfahrungen, daß es für je zwei beliebige Moleküle einen gewissen kleinen Abstand gibt, außerhalb dessen die Molekularkräfte unmerklich klein sind, während sie innerhalb desselben sehr beträchtliche Größe annehmen können. Man nennt diesen Abstand den Halbmesser der Wirkungskugel (Radius der Wirkungssphäre) oder kurz die Wirkungsweite der beiden Moleküle aufeinander. Man hat verschiedene Wege, diesen Halbmesser in bestimmten Fällen auszumessen[1]), und wir kommen gelegentlich darauf zurück (329, 344). Viel Eingehendes ist hier aber nicht bekannt; es kann 0·00001 mm als ungefähre durchschnittliche Größe der Wirkungsweite angegeben werden, so daß je nach der Molekülart etwa 10 bis 100 Moleküle zwischen eben noch aufeinander wirkenden Molekülen Platz hätten. Die Begrenzung der Wirkungsweite ist übrigens sehr verwaschen zu denken, und die größten anziehenden Kräfte sind wohl überhaupt nur innerhalb der ersten Zehntel oder gar Hundertel dieser Weite zu finden, so daß mit sehr großen Kräften nur unmittelbar benachbarte Moleküle aufeinander wirken (342).

Die Größe der Kraft zwischen zwei Molekülen hängt aber nicht nur von deren Abstand ab, sondern unzweifelhaft stark von der Erfüllung oder Nichterfüllung des Abstandes durch andere Moleküle. Ist der Zwischenraum leer, so sind die Kräfte schwächer und die Wirkungsweiten wohl sehr viel kleiner, was sich besonders bei den Gasen zeigt, deren Moleküle nur äußerst geringe Kräfte aufeinander ausüben, ausgenommen nur in unmittelbarer Berührung bei ihren

[1]) Zumeist ist die geringste Dicke von Flüssigkeitsschichten, aber auch von festen Schichten untersucht, die noch zusammenhalten oder die noch die Oberflächenspannung von Flüssigkeiten beeinflussen. Auch die Dicke der Wasserschicht ist ermittelt, mit welcher Glasoberflächen in wasserdampfhaltiger Luft sich überziehen. In einem anderen Falle wurde die Dicke eines Silberüberzuges auf Glas gemessen, der den Einfluß des Glases auf den Randwinkel von Wasser eben aufhebt. Alle diese Messungen gaben die Wirkungsweite der Größenordnung nach nahe übereinstimmend etwa wie oben anzugeben.

Zusammenstößen (346). Dabei ist der mittlere Abstand zweier einander nächster Gasmoleküle bei gewöhnlichem Druck viel kleiner als die angegebene, bei Ausfüllung des Zwischenraumes mit Molekülen geltende Wirkungsweite. Die hieraus ersichtliche gute Vermittelung der Molekularkräfte durch zwischenliegende Moleküle geschieht aber wohl nur durch die äußeren Teile dieser Moleküle, nicht durch sie hindurch[1]). Denn die Lichtaussendung der Atome zeigt, daß die Molekularkräfte nicht tief in das Innere der Atome dringen (O 81, 105, E 502); die Molekularkräfte und ihre Gegenkräfte scheinen ihre Angriffspunkte nur in den äußeren Teilen der Atome zu haben (vgl. W 106). Wassermoleküle scheinen besonders gute Vermittler von Molekularkräften zu sein und dabei einen vergrößerten Wirkungshalbmesser zu geben. Hierin, wie in jeder Beziehung, sind die Molekularkräfte von sehr verwickelter Art ganz im Gegensatz zur Gravitation, die ohne Rücksicht auf Ausfüllung des Zwischenraumes und nach immer einfachem Gesetz wirkt.

249. Abstoßung, Drehung. — Aber nicht nur anziehende Kräfte verwickelter Art findet man innerhalb der Wirkungskugel, sondern bei allerkleinsten Abständen kehren die Kräfte der Moleküle sogar ihr Zeichen um; sie werden abstoßend. Die Tatsache der gegenseitigen Undurchdringlichkeit der Atome und Moleküle (16) zeigt das Letztere unmittelbar.

Eine auch darüber noch hinausgehende Besonderheit ist es, daß Moleküle nicht nur abstandsändernde Kräfte, sondern auch Drehmomente aufeinander ausüben. Die Tatsache der Kristallisation zeigt dies. Wenn ein Kristall aus einer Lösung oder Schmelze allmählich wachsend sich ausscheidet, so lagert sich jedes neu hinzukommende Molekül nicht beliebig an, sondern wohlgerichtet durch drehende Kräfte, die von den Molekülen des schon vorhandenen Kristalls ausgehen. Denn ein Kristall ist ein Körper, in welchem die Moleküle bzw. Atome nicht wirr aneinandergelagert, sondern mit den durch ihren inneren Aufbau gegebenen ausgezeichneten Richtungen parallel gestellt sind. Dies kommt am auffallendsten schon äußerlich in der Kristallform zum Ausdruck. Ein Kochsalzkristall z. B. hat Würfelform, und er spaltet, zerschlagen, nicht in beliebige Bruchstücke, sondern wieder in Würfel oder Würfel-Aneinanderlagerungen, so daß jedes kleinste Stück eines Kochsalzkristalles seinem inneren Aufbau nach ein Würfel sein muß. Dies kann im einfachsten Falle so sein, wie es Abb. 58 darstellt: Vier Na- und vier Cl-Atome in Würfelform zusammengebaut geben ein „Chlornatriummolekül" Na_4Cl_4. Es ist dabei zu bedenken, daß bei der Vereinigung vieler solcher Moleküle zu einem Kochsalzkristall jedes dieser Würfelmoleküle dem anderen parallel gestellt sein muß und zwar so, daß jedes Na-Atom 6 Cl-Atome und jedes Cl-Atom 6 Na-Atome in überall gleichen Abständen als nächste Nachbarn bekommt. Solche „Kristallgitter"-Anordnungen der Atome sind durch die in der Optik zu erwähnende Hochfrequenz- oder Kristall-Spektroskopie bestätigt (O 160) und auch in verwickel-

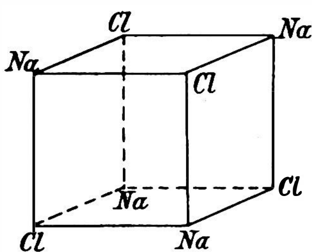


Abb. 58. Molekularer Kochsalzwürfel.

[1]) Die Vermittelung erfolgt wohl unter Drehung der zwischenliegenden Moleküle (vgl. 249 u. erste Fußnote zu 316).

teren Fällen erforschbar geworden. Schon der einfache Fall des Kochsalzes zeigt aber das Wesentliche: die gesetzmäßige Ordnung im Aufbau aus den Atomen. Findet die Ausscheidung aus der Schmelze oder Lösung zu schnell statt, so können die drehenden Kräfte nicht überall zur Geltung kommen; der Körper wird dann „kristallinisch", d. h. er besteht zwar aus einzelnen größeren oder kleineren Kristallen, die aber wirr nebeneinander gelagert sind. Von hier zum „amorphen" Körper, bei dem sämtliche Moleküle ungeordnet aneinanderhaften, ist ein stetiger Übergang.

250. Molekularkräfte und Atomkräfte. — Man beachte am Beispiel des Kochsalzes auch, daß im festen Körper Molekularkräfte und Atomkräfte (chemische Kräfte) als eins und dasselbe erscheinen können, während man im Gaszustand, wo die einzelnen Moleküle als einfache Atompaare, NaCl, weit voneinander getrennt sind, einen unzweifelhaften Unterschied sieht. Es zeigt sich im Gaszustand als charakteristisch für ein Na-, sowie für ein Cl-Atom, daß es je ein anderes, „chemisch einwertiges" Atom besonders fest binden kann (woher auch der Name „einwertig" kommt, vgl. E 192) und daß so entstehende Gruppen, wie NaCl, dann nach außen nur mehr geringere Kräfte zeigen. Im festen Zustand dagegen ist die gegenseitige Bindung der Atome offenbar eine andere; hier hält jedes Na-Atom, sowie auch jedes Cl-Atom 6 Atome der anderen Art mit großen Kräften fest. (Vgl. über Dichteunterschiede der Bindungen W 106).

Es geht daraus hervor, daß die Vorstellung der „chemischen Wertigkeit" der Atome zwar eine der Haupteigenschaften der Atome in bezug auf ihre Kraftwirkungen richtig wiedergibt daß aber die Atomkräfte doch vielartiger sind als es diese einfache Vorstellung angibt (vgl. E 192),

Entsprechend der Kristallgitteranordnung zeigen sich die Atome in den festen Körpern bei Untersuchung der Wärmebewegung auch nicht gruppenweise, sondern selbständig, einzeln beweglich (W 119, 120). Es kommen daher im festen Zustand wohl meist keine bestimmt umgrenzten Atomgruppen als Moleküle zur Geltung wie im gasförmigen und auch im flüssigen Zustand, und es sind dann unter „Molekülen" die Atome zu verstehen.

Eine bestimmte Molekulargröße kann man aber auch denjenigen Verbindungen zuschreiben, die etwa nur im festen Zustand bekannt wären; es kann dann als Molekül die kleinste Atomgruppe gelten, die allen Eigenschaften des festen Körpers entspricht. So genügt beispielsweise beim Kochsalz keine kleinere Gruppe als Na_4Cl_4 der Würfelform der Atomanordnung.

251. Atom- und Molekularkräfte als elektromagnetische Kräfte. — Die vielartigen und verwickelt erscheinenden Eigenschaften der Atomkräfte und der Molekularkräfte (248 u. f.) sind nicht verwunderlich. Denn es ist sicher geworden, daß Grundbestandteile aller Atome die beiden Elektrizitäten sind (E 527). Daher sind bei den Atomen und Molekülen elektrische Kräfte zu erwarten und wegen der Bewegung der Elektrizitäten in den Atomen auch magnetische Kräfte; auch sind besondere, unmittelbare Zeichen dafür vorhanden, daß die Molekularkräfte elektrischer Natur sind (E 135), und für die chemischen Kräfte der Atome gilt dies ganz besonders (E 181). Gerade bei elektrischen und magnetischen Kräften sind aber in der Tat sowohl Anziehungen als Abstoßungen und auch drehende Kräfte zu erwarten, und diese können um so verwickelterer Art sein, je mehr elektrische Elementarquanten beiderlei Zeichens im Atom ent-

halten sind. Elektromagnetische Kraftfelder in der Umgebung der Atome sind auch tatsächlich nachgewiesen (E 491).

Da der Aufbau der Atome im einzelnen keineswegs genügend bekannt ist, ist es nicht möglich über Atom- und Molekularkräfte im einzelnen etwas vorauszusagen; im Gegenteil: es müssen diese Kräfte erfahrungsmäßig noch weiter studiert werden, und es kann dies vor allem an den großen Molekülanhäufungen, den festen, flüssigen und gasförmigen Körpern geschehen.

Bei den festen Körpern zeigen sich die Molekularkräfte in besonderer, auch in technischer Anwendung wichtiger Weise in Gestalt der elastischen Kräfte, die wir sogleich eingehend betrachten (253 u. f.). Die Äußerungen der Molekularkräfte bei den Flüssigkeiten behandeln wir später (294 u. f., besonders 315 u. f.). Am schwächsten äußern sich die Molekularkräfte bei den Gasen (346 u. f.).

252. Wärmebewegung bei den festen Körpern. — Bemerkt sei sogleich, was in der Wärmelehre näher untersucht wird (W 78), daß die Moleküle (Atome, vgl. 250) niemals in Ruhe, sondern stets in der mit steigender Temperatur lebhafter werdenden Wärmebewegung begriffen zu denken sind. Diese Bewegung besteht in den festen Körpern in Schwingungen um Gleichgewichtslagen (256). Die Amplituden der Schwingungen sind stets sehr klein wegen der sehr dichten Lagerung der Atome; die Gleichgewichtslagen sind in denjenigen kleinen gegenseitigen Abständen der Atome zu denken, in welchen anziehende und abstoßende Kräfte ineinander übergehen (vgl. 256).

Elastische Kräfte fester Körper.

253. Elastizitätsgrenze. Festigkeitskräfte. — Wirken von außen her Kräfte auf einen festen Körper, wie bei Dehnung oder Biegung eines Stabes, so ändert dies im allgemeinen sowohl die Form als auch das Volum des Körpers. Mit diesen Änderungen werden entgegengerichtete Kräfte im Körper geweckt, die die Form- und Volum-Änderungen rückgängig zu machen streben. Dies sind die „elastischen Kräfte“. Werden dann die äußeren Kräfte weggenommen, so können die Änderungen durch Wirkung der elastischen Kräfte vollständig wieder verschwinden, wenn die äußeren Kräfte nicht zu groß waren. Man sagt dann, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten war. Bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze treten bleibende Änderungen ein.

Die elastischen Kräfte sind stets eine Summenwirkung der Molekularkräfte des Körpers. Was einen festen Körper „fest“ macht, nämlich ihn vor Zertrennung bewahrt, sind die anziehenden Kräfte der Moleküle; die abstoßenden Kräfte haben daran keinen Teil. Man kann daher die anziehenden Kräfte auch Festigkeitskräfte nennen. Wenn die Elastizitätsgrenze nicht überschritten werden soll, so kommt es darauf an, daß die äußeren Kräfte nicht die Festigkeitskräfte übersteigen, wofür die Grenze durch die „Zugfestigkeit“ gegeben ist (273).

254. Unvollkommenheiten und Verwickeltheiten der elastischen Eigenschaften. — Oft kann man, besonders bei großen Form- oder Volumänderungen — aber noch innerhalb der Elastizitätsgrenze — bemerken, daß die Änderungen nicht sogleich nach Ansetzung der äußeren Kräfte in voller Größe eintreten, sondern etwas verzögert, ebenso daß es bei Wegnahme der äußeren Kräfte einige Zeit dauert, bis der letzte Rest der Änderungen wieder verschwunden ist. Man nennt dies elastische Nachwirkung. Sie ist verschiedenen Stoffen in verschiedenem Maße eigen. Kautschuk zeigt sie sehr; Glas, Stahl und besonders Quarz zeigen sie wenig.

Körper ohne merkliche elastische Nachwirkung werden **vollkommen elastisch** genannt
Wir sehen im folgenden von einer gesonderten Betrachtung der elastischen Nachwirkung ab, um vor allem die elastischen Haupt-Erscheinungen zu studieren. Außerdem betrachten wir nur **nichtkristallisierte** (kristallinische und amorphe) **Körper**, die im Gegensatz zu den Kristallen in allen Richtungen gleiches Verhalten zeigen („isotrop" sind). Das („anisotrope") Verhalten der Kristalle zeigt grundsätzlich nichts Neues, ist nur wegen der Richtungsverschiedenheiten verwickelter.

255. Verschiedene elastische Verformungen und ihr allgemeines Gesetz. — Ein Hauptfall elastischer Beeinflussung, Verformung, eines festen Körpers ist die **Dehnung**. Man kann sie an einem Draht oder auch an einem Kautschukstreifen beobachten, der oben befestigt ist und an dem man unten Gewichte hängt, um ihn leicht meßbaren Kräften auszusetzen. Man findet, daß **die eintretende Verlängerung proportional der dehnenden Kraft ist. Diese Proportionalität zwischen äußerer Kraft und elastischer Änderung** gilt mit bemerkenswerter Genauigkeit **für alle Arten** (nicht zu großer) **elastischer Beeinflussungen fester Körper**, als welche außer der **Dehnung** noch **Biegung, Zusammendrückung** und **Drillung** zu nennen sind[1]) (263, 266, 268).

Die elastischen Änderungen von Form und Volum erscheinen als Wirkungen der äußeren Kräfte, die ihre Ursache sind; sie können aber selbst als Ursachen der inneren, elastischen Kräfte aufgefaßt werden, die ihre Wirkung sind, insofern als die in veränderte Abstände oder gegenseitige Lagen gebrachten Moleküle veränderte Kräfte aufeinander ausüben. Die äußeren Kräfte und die inneren, elastischen Kräfte sind einander gleich sobald Gleichgewicht eingetreten ist, was am nicht weiteren Fortschreiten der elastischen Änderung des betreffenden Körpers zu erkennen ist (vgl. 73). Es **werden daher die elastischen Kräfte unmittelbar meßbar durch die äußeren Kräfte**, die z. B. Schwerkräfte sein können.

256. Die Moleküle (Atome) haben in den festen Körpern Gleichgewichtslagen. — Das Auftreten von Kräften gegen Abänderung der Zusammenlagerung der Moleküle (Atome), wie bei allen elastischen Beeinflussungen der festen Körper, zeigt an, daß jedes Molekül durch seinen Nachbarn so in einer Gleichgewichtslage festgehalten ist, wie etwa eine Pendelkugel in ihrer Ruhelage. Jede Änderung der Lage weckt Kräfte, die in die ursprüngliche Lage zurückführen. Daß dies auch bei der Dehnung stattfindet, die Abstandsvergrößerung der Moleküle bedeutet, und dabei doch **zunehmende** Kräfte weckt, ist bei der sehr dichten Lagerung der Moleküle im festen Zustand nicht unverständlich, weil in kleinsten Abständen sogar Abstoßung stattfindet (249), die bei wachsendem Abstand in Anziehung übergeht, so daß diese zunächst mit wachsendem Abstand wachsen kann. Es ist aber auch die Wärmebewegung zu berücksichtigen (252), die Raum zwischen den Molekülen beansprucht und auseinandertreibend wirkt. Wird durch Dehnung neuer Raum zwischen den Molekülen geschaffen, so sinkt die auseinandertreibende Kraft der Wärmebewegung (wie der Druck eines Gases bei Volumvergrößerung sinkt) und die anziehenden Molekularkräfte können auch dadurch bei wachsendem Abstand ins Übergewicht kommen.

257. Zug und Druck. — Der Fall der **Dehnung** hat die meisten allgemein wichtigen Erkenntnisse geliefert. Zunächst ist zu beachten, daß nicht die Kraft an sich maßgebend ist für die Größe der eintretenden Dehnung eines beliebigen Stabes, sondern die auf die Querschnittseinheit des Stabes oder Drahtes be-

---

[1]) Auf der Gültigkeit dieser Proportionalität beruhen alle **Federwaagen** mit ihren gleichteiligen Skalen. Ihr Zeigerwerk vergrößert die von der zu messenden Kraft bewirkte elastische Verformung.

zogene Kraft: der Quotient aus der Kraft und der zu ihr senkrecht stehenden Fläche, auf welche verteilt sie wirkt. Dieser Quotient wird **Zug** genannt, wenn — wie bei der Dehnung — die Kraft nach dem Äußeren des Körpers gerichtet ist. Ist sie nach dem Inneren des Körpers gerichtet — wie im Fall einer Pressung —, so wird derselbe Quotient **Druck** genannt.

Es ist Zug oder Druck $p = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$. 257)

Man bemerkt, daß wir jetzt nicht so sehr auf den Angriffspunkt der wirkenden Kräfte achten, als vielmehr auf die Fläche, über die sie sich verteilen. Diese Verteilung wird gewöhnlich durch besondere feste Körper bewirkt, die man einschaltet, wie z. B. die Holzplatte, in welche der zu dehnende Kautschukstreifen Abb. 59 gefaßt ist.

Man versteht unmittelbar, daß nur die auf die Flächeneinheit bezogene Kraft maßgebend sein kann, wenn man bedenkt, daß der zu dehnende Körper in ebensoviele Fäden zerteilt sein könnte als sein Querschnitt Quadratmillimeter hat und daß dann dieselbe Dehnung erfolgen würde, wenn an jedem dieser Fäden der auf seinen Querschnitt entfallende Teil der Gesamtkraft gesondert wirkte.

258. Längsdehnung. — Außerdem ist einzusehen, daß die beobachtete Verlängerung des Stabes die Summe der Verlängerungen aller seiner einzelnen Längenteile ist, weil alle demselben Zuge unterworfen sind, der längs des ganzen Stabes bis an seine obere Befestigung hin gleichmäßig wirkt. Daher würde bei doppelter Länge auch die doppelte Verlängerung erfolgen müssen, und es wird die Verlängerung der Längeneinheit des Stabes das richtige Maß für seine elastische Beanspruchung sein. Man nennt dies die Längsdilatation oder Längsdehnung:

$$\text{Längsdehnung } \lambda = \frac{\text{Verlängerung.}}{\text{ursprüngliche Länge}}. \qquad 258)$$

259. Elastizitätsmodul. — Zug p und Längsdehnung λ sind es, die einander proportional sind und zwar so, daß ihr Verhältnis nicht von den Abmessungen des Versuchsstabes abhängt, sondern nur mehr vom Stoff desselben. Dieses Verhältnis

$$\frac{p}{\lambda} = E \qquad 259)$$

wird der Elastizitätsmodul des betreffenden Stoffes genannt.

Er ist die wichtigste, jedenfalls die leichtest zugängliche elastische Konstante jedes festen Stoffes. Gemessen wird er durch Zugversuche mit meist mikroskopischer Ausmessung der Längsdehnung.

Tab. 7 stellt bemerkenswerte Ergebnisse zusammen. Ein sehr großer Elastizitätsmodul, wie bei Stahl, bedeutet die Erforderlichkeit sehr großer Zuge (oder Drucke) zur Hervorbringung gegebener Längenänderungen; ein kleiner Elastizitätsmodul, wie bei Kautschuk, zeigt große elastische Nachgiebigkeit schon bei kleinen Zugen (oder Drucken) an.

260. Querschrumpfung. — Zugleich mit der Längsdehnung zeigt jeder feste Körper eine Querschrumpfung. Man kann dies sehr leicht an dem Kautschukstreifen Abb. 59 beobachten, auf welchen im ungedehnten Zustande (a) ein Quadrat

Tab. 7. **Elastizitätsmodul E; Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdilatation μ.**

	E	μ	Zug-festigkeit
Iridium	52500		
Wolfram	36200	0·17	
Rhodium	28000	0·47	
Stahl	20000	0·20	70
Nickel	20000	0·3	
Kupfer	12000	0·35	40
Messing	10000	0·35	60
Zink	9000	0·3	13
Silber	8000	0.38	29
Glas	6500	0·3	5
Blei	1700	0·45	2
Holz, Hanfseil	900		4
Kautschuk	0·1	0·3	0·1
	kgr auf 1 mm²		kgr auf 1 mm²

gezeichnet sei. Belastet man nun den Streifen, so findet man das Quadrat in vertikaler Richtung verlängert, was der schon untersuchten Längsdehnung entspricht; zugleich ist aber in horizontaler Richtung das Quadrat verschmälert, wie auch der ganze Streifen eine Verschmälerung zeigt (b). Die Verschmälerung ist — wie die Verlängerung — ins Verhältnis zur ursprünglichen Abmessung zu setzen, und man nennt das Verhältnis

$$\beta = \frac{\text{Verschmälerung}}{\text{ursprüngliche Breite}} \qquad 260)$$

die Querschrumpfung (Querkontraktion).

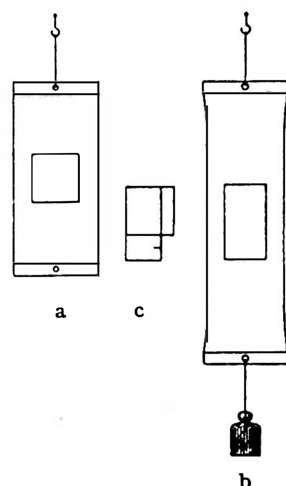


Abb. 59. Dehnung.

Da die Querschrumpfung in beiden auf der Zugrichtung senkrechten Richtungen auftritt, kommt sie für eine mit dem Zug verbundene Volumänderung des Körpers doppelt in Betracht, die Längsdehnung aber nur einmal. Die Längsdehnung vergrößert das Volum, die Querschrumpfung verkleinert es, und es könnte sein, daß das Volum im ganzen ungeändert bleibt. Dies wäre der Fall, wenn $2\beta = \lambda$, oder $\beta/\lambda = 1/2$ wäre[1]). Die Beobachtung zeigt aber, daß stets $\beta < \lambda/2$, was einer Vergrößerung des Volums entspricht. Man kann dies an dem Kautschukstreifen Abb. 59b unmittelbar

[1]) Ist das Volum eines Stabes vor der Dehnung $l \cdot b \cdot h$, so ist es nachher $l(1+\lambda)b(1-\beta)h(1-\beta) = lbh(1+\lambda-2\beta)$ bis auf Summanden mit Produkten der kleinen Größen λ und β, die um so mehr verschwinden, je kleiner diese Größen selbst schon sind.

ersehen; das Quadrat auf ihm ist weniger verschmälert als um die Hälfte seiner Verlängerung, wie ein Vergleich mit 59c zeigt.

In dieser Weise oder durch Volummessung (etwa unter Wasser) kann β oder das Verhältnis β/λ auch gemessen werden.

261. *Dieses Verhältnis von Querschrumpfung zu Längsdehnung,*

$$\mu = \frac{\beta}{\lambda}, \qquad 261)$$

ist neben dem Elastizitätsmodul E die *zweite elastische Konstante des festen Aggregatzustandes.* Tab. 7 zeigt Werte von μ für verschiedene Stoffe. Man sieht, daß μ überall unter 0·5 ist, wie es der Volumvergrößerung bei Dehnung entspricht; $\mu = 0{\cdot}5$ würde unveränderliches Volum bedeuten (260). Außerdem sieht man aber ganz besonders, daß μ *unabhängig* ist *von* E. Nickel, Zink, Glas und Kautschuk haben z. B. rund gleiche μ, aber doch sehr verschiedene E.

262. *Jeder feste Körper hat somit zwei elastische Konstanten,* und dies entspricht seinem *zweifachen Streben:* sowohl seine *Form* als auch sein *Volum* aufrecht zu erhalten (vgl. 272). Es zeigt sich, daß man mittels der beiden, von der Dehnung genommenen Konstanten E und μ auch alle anderen elastischen Veränderungen berechnen kann[1]), von denen wir noch einige wichtige Fälle betrachten (263—271).

263. *Biegung.* — Wenn ein Stab, Abb. 60, an beiden Enden aufliegend, in der Mitte belastet wird, so wird er durchgebogen, so daß die Mitte um D gesenkt ist. Diese elastische Änderung kann aus der Kenntnis von der Dehnung unmittelbar beurteilt werden; denn die ganze untere Hälfte des Stabes findet sich hier gedehnt und die obere Hälfte ist in einem der Dehnung genau entgegengesetzten Zustand, den man Drückung oder Stauchung nennen kann; die punktierte Mitte ist weder gedehnt noch gedrückt. Daß dem so sein muß ersieht man aus der Möglichkeit, die Biegung statt durch Belastung der Mitte auch durch Drehmomente an den Enden des Stabes hervorzubringen, im Sinne der in der Abbildung gezeichneten Kräfte. Man kann z. B. den Stab mit den Händen an seinen Enden fassen und dabei die einander entgegengesetzten Drehmomente mit den Achsen in Richtung der Kante b ausüben, so wird er ebenfalls die betrachtete Biegung erhalten. Daher ist die Größe der Durchbiegung D aus dem von Dehnungsversuchen her bekannten Elastizitätsmodul E berechenbar. Es ergibt sich bei der Kraft K, wirkend auf die Mitte,

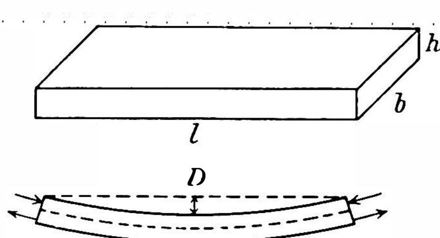


Abb. 60. Biegung.

$$D = \frac{K}{4E} \cdot \frac{l^3}{h^3 b}. \qquad 263)$$

In dieser Gleichung kommt die ganze Schwierigkeit des Baues langer Brücken

---

[1]) Es geschieht dies durch die Rechenweisen der „Elastizitätstheorie" (272), von welcher wir hier und im folgenden alle Grundlagen sowie auch einige Ergebnisse vorbringen.

zum Ausdruck. Denn die Durchbiegung zeigt sich proportional der 3. Potenz der Länge; sie wird daher bei zunehmender Länge bald so groß, daß schon das selber der Länge proportionale, in K enthaltene Eigengewicht der Brücke eine über die Elastizitätsgrenze gehende Durchbiegung D hervorbringen muß. Die Brücke würde, in einfacher Balkenform gebaut, bei einiger Länge schon unter ihrem eigenen Gewicht zusammenbrechen müssen. Es wäre kein Elastizitätsmodul E irgendeines vorhandenen Stoffes groß genug, oder das spezifische Gewicht klein genug, um das zu verhindern. Einen Vorteil kann man wahrnehmen, wenn man die 3. Potenz der Höhenabmessung h neben der 1. Potenz der Breitenabmessung b im Nenner berücksichtigt. Dies bedeutet, daß man einem Balken, der Träger sein soll, rechteckigen, flachen Querschnitt gibt und ihn auf die hohe Kante stellt um ihn möglichst steif gegen Durchbiegung zu machen (Doppel-T-Träger). Ist z. B. $h : b = 1 : 10$, so geht die Durchbiegung D unter der Gesamtkraft K auf $^1/_{100}$ herab, wenn statt der kleinen Abmessung die größere senkrecht (in Kraftrichtung) gestellt wird. Bei sehr großen Längen l nützt dies auch nicht mehr genügend; es wird dann von der einfachen Balkenform abgegangen, wie es alle die verschiedenen Brückenbauarten zeigen. Das Wesentliche ist, daß mit dem Eigengewicht des Baustoffes möglichst gespart wird, so daß er nur an Stellen zur Verwendung kommt, wo Drucke oder Zuge von ihm aufzunehmen sind und überall nur in einer der Größe dieser Zuge oder Drucke angemessenen Stärke.

264. Für alle solche Fragen der Anwendung müssen die Verteilungen der Zuge und Drucke im Inneren der Stoffe bekannt sein. Dies wird im allgemeinen durch Rechnungen ermöglicht, die auf die Raumelemente der Körper eingehen („Elastizitätstheorie", 272). In einfachen Fällen wird die Verteilung auch ohne Rechnung klar. So herrscht in einem gedehnten Stabe in seiner ganzen Länge und im ganzen Querschnitt überall derselbe Zug. Beim gebogenen Balken (Abb. 60) dagegen ist in der (punktierten) Mitte gar kein Zug vorhanden, und der stärkste Zug findet sich an der unteren, der stärkste Druck an der oberen Oberfläche. Man sieht daraus, daß ein hohler Balken bei gleichem Gewicht mehr tragen kann, ohne über die Elastizitätsgrenze zu kommen, als ein voller, weil er kein Eigengewicht an Stellen hat, wo weder Zug noch Druck vorkommt. Dasselbe ist der Fall bei Säulen, die auf Druck in Längsrichtung beansprucht werden. Zwar wird Druck in beliebiger Größe vom Stoffe ertragen; aber der einseitige Druck ist mit Stauchung der Säule verbunden. Ihr Querschnitt wird größer bei der Belastung — was das Gegenteil der Querschrumpfung bei Dehnung ist (260) —, und dies bringt Zuge längs ihres Umfangs hervor, die wieder an der Oberfläche am größten sind. Daher ist bei Tragsäulen wieder die Röhrenform vorteilhaft. Dies findet sich ausgenutzt in den Röhrenknochen der Lebewesen, wie überhaupt die belebte Natur alles in Verwendung zeigt, was Materie und Äther der Betätigung von Geist zu bieten vermögen[1]).

265. Die Festigkeitskräfte bei sehr großen Massen machtlos gegen Gravitation. — Was oben über die Durchbiegung langer Stäbe durch ihr eigenes Gewicht bemerkt wurde (263), gilt übrigens ganz allgemein: Es gibt

[1]) Noch wunderbarer als die besonders für die Vögel wichtige Gewichtsersparnis durch die Röhrenknochen ist es wohl, daß deren Hohlräume als geschützte Orte der Neubildung der lebenswichtigen Blutkörperchen dienen.

keinen Stoff, der bei genügend großen Abmessungen mit seinen Festigkeitskräften (253) der Gravitation standhalten könnte. Schon Galilei sah das ein, wenn er auch nur den Fall der irdischen Schwere ins Auge faßte und die Festigkeitskräfte — die er schon eingehend untersucht — noch nicht, wie Newton, als Anziehungskräfte der inneren Teile der Körper erkannte. Er sagt[1]), daß „die Natur keine Bäume von übermäßiger Größe entstehen lassen kann, denn die Zweige würden schließlich durch das Eigengewicht zerbrechen" und daß „ein Riese von übermäßiger Größe bei Beibehaltung der gewöhnlichen Verhältnisse der Körperteile durch das Eigengewicht zerdrückt werden und fallen müßte". Wachsen die Abmessungen bei beliebiger Form zu Planetengröße an, so treten die Festigkeitskräfte schon gegen die von den eigenen Teilen der Masse gegeneinander ausgeübte Gravitation zurück. So kann im Erdinneren in einiger Tiefe keine große Höhlung bestehen bleiben, wenn etwa Wasser sie ausgewaschen hat; sie muß einstürzen (Einsturzerdbeben). Ein großer Planet festen Aggregatzustandes von anderer als kugeliger Form würde unter Wirkung seiner eigenen Gravitation zerbrechen und damit kugelig sich umformen müssen.

Dies alles ist dadurch begründet, daß bei jeder Einwirkungsart von Kräften, ausgenommen nur bei der Kompression (266), nicht nur Drucke, sondern auch Zugkräfte auftreten (s. z. B. 264), die den Festigkeitskräften entgegenwirken.

266. Kompression (allseitige Zusammendrückung). — Dieser von Dehnung und Biegung wesentlich verschiedenen elastischen Einwirkung ist ein Körper ausgesetzt, den man beispielsweise in das Innere eines Dampfkessels bringt, oder auf den Boden des Meeres versenkt. Das Besondere hierbei ist allseitig gleicher Druck, in dessen Folge nur Volumänderung ohne jede Formänderung eintritt; eine Kugel bleibt Kugel, ein Würfel bleibt Würfel. Nur das Volum wird kleiner. Abb. 62b zeigt, was mit jedem würfeligen Raumelement eines unter allseitigem Druck befindlichen Körpers geschieht; man hat reine Volumänderung.

Zum Vergleich zeigt Abb. 62a das Entsprechende für den Fall der Dehnung; es findet sich hier die schon betrachtete Verlängerung und Querschrumpfung wie beim ganzen gedehnten Körper (Abb. 59), so auch bei jedem seiner Raumelemente. Man hat hier, wie schon bemerkt wurde (260), Formänderung und Volumänderung.

267. Kompressibilität. — Die Größe der Volumänderung der Volumeinheit bei einer Druckänderung um 1 kgr/cm² wird die Kompressibilität oder Zusammendrückbarkeit Z des betreffenden Stoffes genannt; sie ist aus den beiden Konstanten E und μ des Stoffes berechenbar (vgl. 272), und zwar ist

$$Z = \frac{3\,(1-2\mu)}{E}. \qquad 267)$$

Man sieht, daß $\mu = 1/2$ $Z = 0$, d. i. einen unzusammendrückbaren (inkompressiblen) Körper ergäbe, was ganz der Bedeutung von μ entspricht (261). Tab. 8 gibt (unten) Zahlen für einige feste Körper. Man sieht, daß die Kompressibilitäten alle sehr klein sind. Über die Flüssigkeiten s. 312 u. f.

Die hier angenommene Druckeinheit, 1 kgr/cm², wird auch „Atmosphäre" genannt (vgl. 351).

[1]) Zweiter Tag der „Unterredungen".

Tab. 8. **Kompressibilität.** Volum-Änderung durch Druck von 1 Atm. in Bruchteilen des vorhandenen Volums.

Quecksilber	0·000004	0°C
Wasser	0·000050	0°C
"	48	10°C
"	46	20°C
"	45	60°C
"	48	100°C
Wasser bei 10000 Atm.	10	20°C
Alkohol (C_2H_6O)	100	0°C
"	129	40°C
Aether ($C_4H_{10}O$)	152	0°C

Stahl	0·0000009	$= 3\,\frac{1-2\mu}{E}$
Blei	18	
Glas	19	

Die Kompressibilitäten nehmen bei höheren Drucken ab. Es ist dies ein besonderer Ausdruck der gegenseitigen Undurchdringlichkeit der Atome[1]).

Da die Kompression reine Volumänderung ist, so ist die reziproke Kompressibilität, 1/Z, das richtige Maß für die Volumelastizität eines Stoffes, d. i. für sein Sträuben gegen Volumänderung.

268. Endlich ist noch die Torsion, Drillung oder Scherung zu betrachten. Man hat sie an einem Stabe, wenn er Drehmomenten unterworfen ist, deren Achse in der Längsrichtung des Stabes liegt. Abb. 61 zeigt, was mit den einzelnen Querschnitten des Stabes geschieht, die hier mit leichten, am Stab befestigten Zeigern versehen sind. Sie werden gegeneinander verdreht. Im entlasteten Zustande stehen alle Zeiger in einer Ebene (punktierte Linien); wird das Gewicht an das Rad gehängt, so daß es ein tordierendes Drehmoment ausübt, so tritt die gezeichnete Zeigerstellung ein. Man sieht, daß die Drillung gleichmäßig über die ganze Länge des Stabes sich verteilt bis zum anderen, befestigten Ende. Durch Wegnahme des Gewichtes kann man sich davon überzeugen, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten war; die Zeiger kehren wieder in die punktierten Lagen zurück.

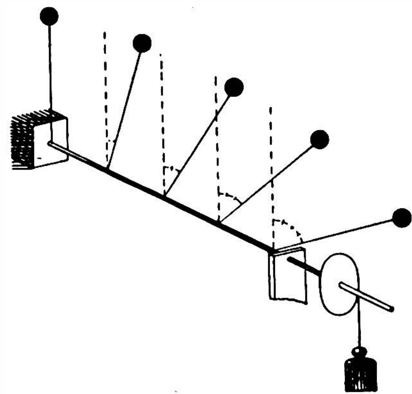


Abb. 61. Drillung.

[1]) Nach Gl. 267 kann hieraus geschlossen werden, daß E oder μ oder beide bei hohen Drucken zunehmen. Zu bemerken ist aber, daß bei höchsten Drucken eine Umgruppierung der Atome mit starker Volumverkleinerung stattfinden kann (s. Note zu 299). Solche Umgruppierung bedeutet Abänderung aller Eigenschaften des Stoffes.

Drillung ändert das Volum des Körpers nicht.

269. Normale und tangentiale Kräfte. — Charakteristisch für die Drillung ist das Wirken rein „tangentialer Kräfte", was schon aus der Art klar wird, wie man einen Stab an beiden Enden anfassen und handhaben muß, um ihn zu drillen; die Kräfte müssen hier in Richtung der Fläche wirken, auf die sie sich verteilen. Bei Dehnung und Pressung waren es dagegen „normale", d. h. senkrecht zu ihrer Angriffsfläche gerichtete Kräfte, die wirkten.

270. Torsionsmodul. — Der auf die Länge l eines zylindrischen Stabes vom Radius r entfallende Drillwinkel δ hat beim Drehmoment D die Größe

$$\delta = \frac{1}{F} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r^4} \cdot D\,. \qquad 270)$$

Hierin ist F die für die Torsionselastizität maßgebende Stoffkonstante, Torsionsmodul genannt. Die Proportionalität mit der Länge l entspricht der gleichmäßigen Verteilung des Drillwinkels δ über die ganze Länge des Stabes. Die 4. Potenz des Halbmessers im Nenner zeigt sehr stark zunehmende Steifigkeit gegen Drillung bei wachsender Dicke. Die Proportionalität von δ mit D entspricht der ganz allgemein geltenden Proportionalität (255) zwischen Kraft (hier Drehmoment) und ihrer elastischen Wirkung (hier den Drillwinkel).

271. Messung von drehenden Kräften. — Dieser Proportionalität entsprechend wird die Drillung von Drähten sehr häufig zur Messung von Drehmomenten benutzt durch Beobachtung des Drillwinkels, welchen die Drehmomente hervorbringen. Man hängt dazu den Körper, welcher das zu messende Drehmoment erfährt, an dem zu drillenden Drahte auf, dessen Radius — wegen r^4 — sehr klein sein muß (dünnster Metalldraht, Quarzfaden) um große Empfindlichkeit zu erreichen. Der Drillwinkel wird dann meist mittels Spiegelablesung gemessen. Es geschieht dies fast an jedem feinen Galvanometer, Elektrometer und in vielen anderen Meßinstrumenten. Zuerst wurde die Torsion so von Coulomb benutzt, in seiner „Drehwaage" zur Messung elektrischer Kräfte (E 14), und dann bald von Cavendish zu seiner schon beschriebenen Gravitationsmessung (212), und Coulomb hat auch zuerst die Proportionalität von δ mit l, D und $1/r^4$ festgestellt.

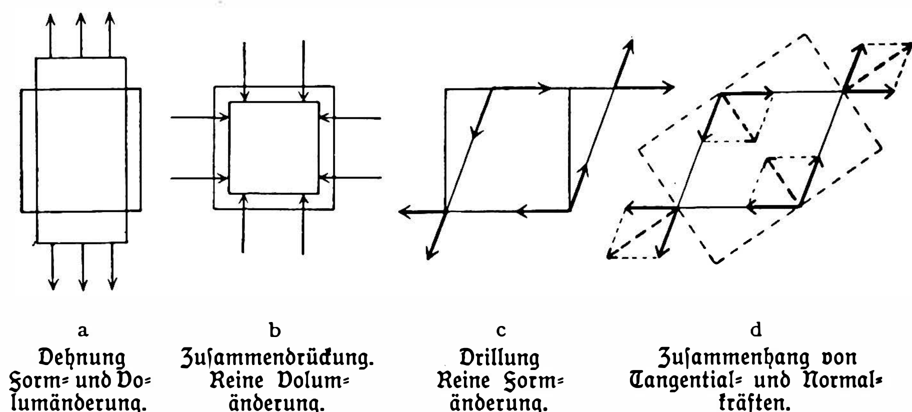
272. Elastizitätstheorie. — Der Torsionsmodul F ist berechenbar aus den beiden, von der Dehnung genommenen Konstanten E und μ (262); er ist

$$F = \frac{E}{2(1+\mu)}\,. \qquad 272)$$

Über die Möglichkelt solcher Berechnung, welche zwei so sehr verschiedene Vorgänge, wie Dehnung und Drillung, miteinander in zahlenmäßige Verbindung bringt, wird man sich klar, wenn man auch bei der Drillung auf Betrachtung der Raumelemente zurückgeht. So wie auf den ganzen Körper wirken bei der Drillung auch an jedem Raumelement tangentiale Kräfte. Abb. 62c zeigt dies und zugleich die Veränderung, welche das würfelförmige Raumelement, das z. B. der Oberfläche des Stabes Abb. 61 angehören könnte, durch diese Kraftwirkung erfährt. Es wird schiefwinklig, ändert also seine Form, ohne aber dabei das Volum zu ändern, so wie auch das Volum des ganzen Körpers sich nicht ändert. Man sieht, daß die Drillung das Gegenstück zur Kompression ist, insofern als Drillung reine Formänderung, Kompression reine Volumänderung ist, während die Dehnung beide Änderungen gemischt aufweist (vgl. Abb. 62a und b).

Die Möglichkeit, durch Rechnung einen Übergang von Drillung zur Dehnung herzustellen und damit überhaupt alle drei Arten elastischer Wirkung miteinander zu verbinden, wird bei Betrachtung von Abb. 62d ersichtlich. Man sieht, daß die tangentialen Kräfte zu Resultierenden vereinigt werden können, die senkrecht stehen auf ein anders herausgeschnitten gedachtes (punktiertes) Raumelement, dessen Volum aber trotz seiner Dehnung nicht vergrößert, sondern ungeändert sein muß, wie es der Drillung entspricht. Das ungeänderte Volum des punktierten Elements ist verwirklicht, indem es durch die (punktierten) Resultierenden gedehnt, zugleich

aber im erforderlichen Maße seitlich gedrückt wird. Da man die Wirkungen normaler Kräfte aus der Dehnung und der ihr genau entgegengesetzt wirkenden Drückung kennt und quantitativ durch E und μ darstellen kann, so kann man, wie man nun sieht, auch die Drillung durch E und μ vollständig darstellen, wovon Gleichung 272 das Ergebnis ist. Ähnliches gilt von der Kompression mit dem Ergebnis von Gl. 267.



a	b	c	d
Dehnung Form- und Volumänderung.	Zusammendrückung. Reine Volumänderung.	Drillung Reine Formänderung.	Zusammenhang von Tangential- und Normalkräften.

Abb. 62.

Die „Elastizitätstheorie" umfaßt Rechnungen, welche in der Hauptsache auf solchen Gedankengängen beruhen. Dazu kommen nur noch die Beziehungen, welche die Kräfte benachbarter Raumelemente (und bei Bewegung auch deren Massen und Beschleunigungen nach dem Grundgesetz) zueinander haben müssen, wenn sie einem zusammenhängenden Körper angehören[1]).

Die Theorie kann mit den 2 Konstanten E und μ für jeden gegebenen Körper rechnen, wie wir es hier getan haben; sie kann aber anstatt dessen auch die aus E und μ berechenbaren Konstanten Z (267) und F (272) benutzen. Letztere haben den Vorteil, daß sie die beiden voneinander unabhängigen elastischen Äußerungen der *festen* Körper, die Aufrechterhaltung des Volums — *Volumelastizität* — und die der Form — *Formelastizität* — gesondert bemessen. *Zwei* elastische Konstanten müssen es stets sein, was schon an der Unabhängigkeit von E und μ ersichtlich wurde (262), eben weil jene beiden Äußerungen den verschiedenen Körpern in ungleichem Verhältnis eigen sind. Letzteres zeigt sich beispielsweise unmittelbar beim Vergleichen eines Würfels aus Gallerte mit einem Glaswürfel. Beide sind wenig kompressibel, haben also große Volumelastizität, jedoch hat nur der Glaswürfel auch erhebliche Formelastizität, während der Gallertwürfel schon mit geringen Kräften in große Schwankungen um die Würfelform zu bringen ist. *Flüssige* Körper haben nur *eine* elastische Konstante (313).

273. *Überschreitung der Elastizitätsgrenze.* — Die Elastizitätsgrenze (253) wird nur dort überschritten, wo Zuge auftreten und zwar dann, wenn diese zu groß werden. Um zu entscheiden, wo dieses Überschreiten an oder in einem gegebenen Körper auftreten wird, muß man die Verteilung der Zuge im ganzen Körper kennen. Wir haben dafür Allgemeines angegeben und einige Beispiele betrachtet (264); bei einem gebogenen Stabe tritt das Überschreiten an der konvexen Oberfläche ein.

Der größte Zug, welcher noch innerhalb der Elastizitätsgrenze von einem Stoff ertragen werden kann, d. h. welcher eben noch keine bleibende Änderung hinterläßt, wird die *Zugfestigkeit* des Stoffes genannt. Man kann sie als *Maß der Festigkeitskräfte* (253) des Stoffes ansehen. Sie kann nicht aus

[1]) Anhang M. V. erläutert den analogen Fall für die Flüssigkeiten und bezieht sich auch auf die Elastizitätstheorie.

den Elastizitätskonstanten (E und μ oder Z und F) berechnet werden, sondern nur besondere Zugversuche können sie ergeben. Tab. 7 enthält einige Zahlen für verschiedene Stoffe. Man sieht die sehr große Zugfestigkeit des Stahls und die ebenfalls große des Messings, das aber einen wesentlich kleineren Elastizitätsmodul hat. Vergleicht man Messing mit seinen beiden Bestandteilen, Kupfer und Zink, so sieht man, daß der Wert der Legierung dieser beiden Metalle besonders in der großen Erhöhung der Zugfestigkeit liegt, welche weit über die der Bestandteile hinausgeht[1]). Für Maschinen- und Werkzeugstoffe ist stets große Zugfestigkeit erwünscht; da außerdem auch große Form- und Volum-Starrheit nötig ist, was einem großen Elastizitätsmodul E entspricht, kommt man auf Stahl als den besten bis jetzt in größeren Mengen vorhandenen Stoff (der durch Wolfram-Zusatz noch verbessert wird).

Die Weite der Elastizitätsgrenze ist durch den Quotienten aus Zugfestigkeit und Elastizitätsmodul gegeben. Dieser Quotient gibt nämlich die größte Längsdehnung an, die noch ohne Überschreitung der Elastizitätsgrenze ertragen werden kann[2]). Beim Kautschuk ist der Quotient und also auch diese höchste noch ertragene Längsdehnung 1, d. h. es kann die Verlängerung gleich der ursprünglichen Länge werden, letztere also bis aufs Doppelte gehen. Kautschuk hat wohl die allerweiteste Elastizitätsgrenze. Bei den meisten anderen Stoffen ist die Elastizitätsgrenze sehr viel enger. Stahl kann z. B. innerhalb der Elastizitätsgrenze nur um $^1/_{200}$ verlängert werden, Messing um etwas mehr.

Eine besondere Frage ist die Art der Überschreitung der Elastizitätsgrenze. Man kann hier zwei wesentlich verschiedene Fälle unterscheiden, die durch die Worte spröde und zähe (duktil) gekennzeichnet werden. Spröde ist ein Körper, der die Elastizitätsgrenze unter Bruch, d. i. plötzlich vollständigem Versagen der Festigkeitskräfte ohne wesentliche bleibende Formänderung überschreitet, wie z. B. Glas. Zähe ist ein Körper, der beim Überschreiten der Grenze vor allem starke bleibende Formänderungen erleidet, wie z. B. die meisten Metalle.

Es kann aber ein und derselbe Stoff je nach der Geschwindigkeit, mit welcher ihm Änderungen beigebracht werden, auch verschieden sich verhalten. Pech z. B. ist zähe wenn es Zeit hat, Kräften auszuweichen; es fließt in genügend großen Stücken bei Zimmertemperatur unter dem Einfluß seiner eigenen Schwere. Schlägt man es aber plötzlich mit dem Hammer, so zeigt es sich spröde; es zerspringt wie Glas. Das Fließen, wenn genügende Zeit vorhanden ist, hängt mit dem zeitweiligen Versagen der Festigkeitskräfte zusammen, das unter dem Einfluß der stets wechselnden Wärmebewegungen eintreten kann, die zeitweilig hier und dort im Körper besonders große Abstände benachbarter Moleküle (Atome) hervorbringen, was bei genügender Mitwirkung von Zug gänzliches Verlassen ihrer Gleichgewichtslagen zur Folge hat (vgl. 316). Bei genügend langem An-

[1]) Es kommt bei Legierungen oft vor, daß ihre Eigenschaften ganz außerhalb der der Bestandteile liegen, und es ist dies stets ein Zeichen dafür, daß die Atome der Bestandteile Gruppierungen eingegangen sind, wenn auch nicht immer in festen Verhältnissen.

[2]) Es ist dies aus der Bedeutung des Elastizitätsmoduls unmittelbar klar; man könnte ihn nach den Gl. 258 und 259 auch angeben als den Zug, welcher Verlängerung aufs Doppelte hervorbrächte, wenn nicht vorher Überschreitung der Elastizitätsgrenze einträte.

dauern der Zugkräfte tritt dies genügend vielfach ein, wie es in Flüssigkeiten schon ohne Zugkräfte der Fall ist. Man sieht daraus auch, daß die Grenze zwischen festem und flüssigem Aggregatzustand bei den zähen Körpern verwaschen ist.

Stoß.

274. Stoßzeit, Stoßkräfte. — Stoß findet statt beim Zusammentreffen von Massen auf Schnittpunkten ihrer Bahnen. Das Besondere beim Stoß ist die sehr schnell ablaufende Einwirkung der zusammenstoßenden Massen aufeinander. Sie üben während der kurzen Zeit ihrer Berührung — Stoßzeit genannt — Kräfte aufeinander aus, „Stoßkräfte", die sehr groß sein können und die dann trotz der Kürze ihrer Dauer große Wirkungen haben. Diese Wirkungen bestehen einesteils in Abänderung der Geschwindigkeiten der zusammenstoßenden Körper, so daß die Hauptfrage sein wird: aus den gegebenen Geschwindigkeiten vor dem Stoße die Geschwindigkeiten nach dem Stoße zu berechnen. Andernteils können bleibende Änderungen an den Körpern selbst eintreten: Formänderungen bei zähen, Zertrümmerungen bei spröden Körpern.

275. Elastischer und unelastischer Stoß. — Treten keine bleibenden Änderungen an den stoßenden Körpern ein, ist also die Elastizitätsgrenze nicht überschritten (253), so nennt man den Stoß elastisch. Sind außerdem die zusammenstoßenden Körper vollkommen elastisch (ohne merkliche elastische Nachwirkung, 254), so hat man den vollkommen elastischen Stoß. Stahl, Glas, einigermaßen auch Elfenbein bieten diesen Fall. Treten aber bleibende Änderungen an den Körpern ein, was beweist, daß die Stoßkräfte über die Elastizitätsgrenze gegangen sind, so nennt man den Stoß unelastisch. Als vollkommen unelastisch bezeichnet man einen Stoß, wenn bei ihm gar keine elastischen Eigenschaften der zusammenstoßenden Körper merklich werden. Sie dürfen dann solche Eigenschaften auch gar nicht haben; es muß die Zugfestigkeit und damit auch die Weite der Elastizitätsgrenze Null sein. Es gibt zähe Körper, bei denen das mit einiger Annäherung zutrifft, wie z. B. Blei, knetbarer Ton, und derlei „weiche" Körper.

Sowohl der vollkommen elastische als der vollkommen unelastische Stoß sind Grenzfälle, die nur angenähert verwirklicht vorkommen. Ihre Betrachtung lehrt aber die Hauptsache dessen erkennen, was bei den zwischenliegenden Fällen der Wirklichkeit vorkommen kann.

Außerdem genügt es den Stoß kugelförmiger Massen eingehend zu betrachten und zwar den zentralen Stoß, wobei die Bahnen der Kugelmittelpunkte in gleiche gerade Linie fallen.

Vor allem betrachten wir den Stoß vom Standpunkt allgemeiner Bewegungsgesetze. Schon Galilei und dann Huygens bis Robert Mayer haben sich in solcher Beziehung mit den Stoßvorgängen beschäftigt, eben um jene Gesetze damals auch an diesen Vorgängen erst zu ergründen.

276. Schwerpunktssatz maßgebend. — Jedenfalls muß für jeden beliebigen Stoßvorgang der Schwerpunktssatz in der einfachen Form gelten, daß der Gesamtschwerpunkt der zusammenstoßenden Körper vom Stoße gänzlich unbeeinflußt bleibt (217). Denn es wirken beim Stoße stets nur innere Kräfte, ausgeübt von den beteiligten Körpern aufeinander. Ist also etwa der Schwerpunkt dieser Körper vor dem Stoße in gleichförmiger Bewegung begriffen, so bleibt er das auch während und nach dem Stoße; es müssen sämtliche Massen und deren etwaige Bruchstücke so mit ihren Bahnen und Geschwindigkeiten sich einrichten, daß die Geschwindigkeit ihres Gesamtschwerpunkts ungeändert bleibt.

Betrachten wir als Hauptbeispiel den zentralen Zusammenstoß zweier Kugeln von gleicher Masse m (Abb. 63). Es habe vor dem Stoß die Kugel A die Geschwindigkeit v und die Kugel B die Geschwindigkeit Null (oberer Teil der Abbildung). Der gemeinsame Schwerpunkt S beider muß stets mitten zwischen ihnen sein; er muß daher die Geschwindigkeit v/2 haben. Diese Geschwindigkeit muß ihm während des Stoßes sowie auch nachher unverändert erhalten bleiben. Dies tritt auch wirklich ein, wenn auch in zweierlei ganz verschiedenen Weisen, je nachdem der Stoß elastisch oder unelastisch ist. Im Falle des vollkommen elastischen Stoßes (mittlere Reihe der Abbildung) findet man die Kugel B nach dem Stoße mit der Geschwindigkeit v abgehen, A aber am Orte des Stoßes in Ruhe zurückbleiben. Die Kugeln haben also beim Stoß ihre Geschwindigkeiten vertauscht; der Schwerpunkt, noch immer mitten zwischen den Kugeln, hat aber seine Geschwindigkeit v/2 beibehalten. Im Falle des vollkommen unelastischen Stoßes nehmen beide Kugeln die gemeinsame Geschwindigkeit v/2 an. Sie prallen nicht voneinander ab, sondern bleiben seit ihrer Berührung dauernd beisammen (unterer Teil der Abbil-

dung); der Schwerpunkt, immer noch mitten zwischen den Kugeln, hat auch hier wieder seine Geschwindigkeit v/2 beibehalten[1]).

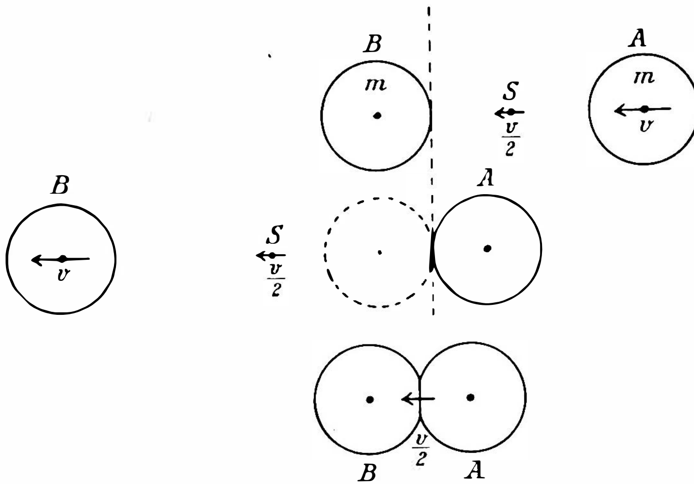


Abb. 63. Zentraler Stoß von Kugeln.

277. Anwendung des Energiegesetzes. — Wir nehmen nun als zweites allgemeines Gesetz das Energiegesetz zu Hilfe. Die Energien vor dem Stoße sind kinetisch und zwar bei der Kugel A $mv^2/2$, bei B Null, im ganzen also $mv^2/2$.

Diese kinetische Energie findet sich im vollkommen elastischen Falle auch nach dem Stoße im Ganzen wieder vor, wenn auch in vertauschter Verteilung; es hat A jetzt Null und B $mv^2/2$. Es ist charakteristisch für jeden Fall vollkommen elastischen Stoßes, daß die gesamte kinetische Energie als solche erhalten bleibt. Es liegt dies an der Art der elastischen Kräfte, daß sie die Arbeiten, welche (während der Stoßzeit) gegen sie geleistet werden, unverändert wieder zurückgeben, wenn die Elastizitätsgrenze nicht überschritten war (und Nachwirkungserscheinungen nicht auftreten).

Ganz anders ist es aber bei einem unelastischen Stoß. Hier ist die kinetische Energie nach dem Stoße in dem betrachteten Beispielsfalle, wo die Masse 2m mit v/2 übrigblieb, $2m(v/2)^2/2 = mv^2/4$ gegen $mv^2/2$ vorher; es ist also die Hälfte der kinetischen Energie beim Stoße verloren gegangen. Es ist auch ganz allgemein so, daß beim unelastischen Stoße eine Verminderung der kinetischen Energie eintritt, was sich daraus erklärt, daß keine elastischen Kräfte da sind, welche gegen sie aufgewandte kinetische Energie wieder zurückgäben. Es wird aber auch keine potentielle Energie aufgespeichert an Stelle der verlorenen kinetischen Energie, denn die Körper finden sich nach dem unelastischen wie nach dem elastischen Stoße vollkommen entspannt. Somit scheint beim unelastischen Stoß Energie verloren gegangen zu sein, wenn man nur deren beide erste Formen (vgl. Tab. 5) beachtet. Die weitere Untersuchung zeigt, daß die verlorene kinetische Energie in der dritten Form, als Wärme, in den zusammengestoßenen Körpern sich wiederfindet (W 73). Es ist somit der unelastische Stoß als einer der Vorgänge der Mechanik festzuhalten, bei welchem die Wärme als Energieform wesentlich mit auftritt. Die Größe des in Wärme verwandelten Energiebruchteils ist in verschiedenen Stoßfällen verschieden groß; doch tritt bei jedem unelastischen Stoß Wärmeentwickelung auf, während sie beim vollkommen elastischen Stoß fehlt.

278. Grundlage von Stoßberechnungen. — Man sieht aus dem vorhergehenden, daß es bei beiden Stoßarten möglich ist, die zwei Geschwindigkeiten zweier beliebiger, zentral zu-

[1]) Man bemerkt, daß man aus diesen Stoßfällen viele andere erledigen kann, wenn man beiden Kugeln gemeinsame Geschwindigkeiten zugefügt denkt (die nicht stören, 45). Fügt man z. B. v/2 nach rechts hinzu, so erhält man den Fall des Zusammenstoßes mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten.

sammenstoßender kugelförmiger Massen vorauszuberechnen, wenn die Geschwindigkeiten vor dem Stoße bekannt sind. Man hat jedesmal für die zwei unbekannten Geschwindigkeiten nach dem Stoße zwei Gleichungen: Bei vollkommen elastischem Stoße den Schwerpunktssatz (Σmv vor und nach dem Stoße gleich, vgl. 220) und die Erhaltung der kinetischen Energie (Σmv^2 vor und nach dem Stoße gleich); bei vollkommen unelastischem Stoße wieder den Schwerpunktssatz und dazu die Gleichheit der beiden Endgeschwindigkeiten. Auch für die Berechnung verwickelterer Stoßfälle bilden diese Gleichungen die Grundlagen, wenn auch noch weitere Überlegungen hinzukommen können.

Als ein einfach zu berechnendes Beispiel vollkommen elastischen Stoßes kann die Reihe gleicher Kugeln Abb. 64 betrachtet werden. Die Kugeln können an Fäden aufgehängt, ebensogut

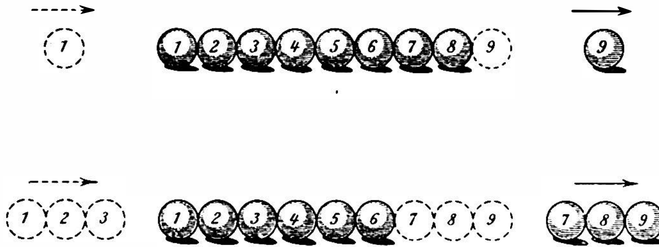


Abb. 64. Kugelreihe in elastischem Stoß.

aber auch auf einer Unterlage (etwa in einer Rinne) rollend beweglich sein; es sind dies überhaupt die Mittel um Stoßversuche ungestört von der Schwerkraft auszuführen. Stößt die Kugel 1 mit der Geschwindigkeit v an die ruhende Reihe der übrigen Kugeln 2—9, so kommt sie dort zur Ruhe und es fliegt Kugel 9 allein mit der Geschwindigkeit v ab. Stoßen 1, 2 und 3 an die Reihe, so fliegen 7, 8 und 9 ab. Man berechnet leicht, daß in keiner anderen Weise den beiden Gleichungen genügt werden könnte. Ein anderes Beispiel gibt 281.

279. **Vorgänge während der Stoßzeit.** — Bemerkenswert ist die Eigentümlichkeit der benutzten Gesetze — Schwerpunktssatz und Energiegesetz —, wichtige Aussagen zu liefern ohne Eingehen auf die Einzelheiten des Vorganges.

Indessen bedürfen auch diese Einzelheiten, die Vorgänge während der kurzen Stoßzeit, die Umwandlung der vor dem Stoße vorhandenen Geschwindigkeiten in die nach dem Stoße vorzufindenden betreffend, besonderer Beachtung. Von dem Augenblick der ersten Berührung an, welchen die 2. Zeile der Abb. 63 (punktiert) darstellt, platten sich die beiden Kugeln aneinander ab. Dies geschieht infolge ihrer Trägheit. Es kann A nicht sofort zur Ruhe und B nicht sofort in volle Endgeschwindigkeit kommen, sondern dies geschieht überhaupt nur durch Wirkung von Kräften und zwar sind es die Kräfte — Stoßkräfte —, welche die Kugeln während des Fortschreitens ihrer Formänderungen aufeinander ausüben. Diese Kräfte (Kraft und die ihr gleiche Gegenkraft) verzögern A von der Geschwindigkeit v auf v/2 und beschleunigen B von der Geschwindigkeit Null auf ebenfalls v/2. In diesem Augenblick, welchen die letzte Zeile der Abb. 63 darstellt, haben die Kugeln diese gleiche Geschwindigkeit v/2 erreicht, und die Abplattung ist auf das Höchstmaß gestiegen. Damit ist für den vollkommen unelastischen Stoß die Stoßzeit zu Ende; die beiden Kugeln fahren in dauernder, aber kräftefreier Berührung mit der gemeinsamen Geschwindigkeit v/2 weiter, und sie bleiben abgeplattet. Im Falle des vollkommen elastischen Stoßes ist bisher erst die halbe Stoßzeit verlaufen. Während der zweiten Hälfte gleichen sich die Abplattungen wieder aus, da die Elastizitätsgrenze nicht überschritten war, und es geschieht dies mit Kräften gleich denjenigen, die die Abplattungen bewirkt hatten, und zwar ohne Verspätung, da elastische Nachwirkung nicht vorhanden ist. Daher erfolgen weitere Geschwindigkeitsänderungen von derselben Größe wie die bereits stattgehabten; es kommt A zur Ruhe und B zur vollen Geschwindigkeit v. In diesem Augenblick hat die Berührung der beiden Kugeln und auch die Stoßzeit ihr Ende erreicht.

Man kann die diesen Vorgängen entsprechenden Formänderungen bei unelastischen Körpern nachträglich dauernd beobachten; bei elastischen Körpern kann man sie durch Berußung des einen stoßenden Körpers sichtbar machen, indem ein die größte Verformung abbildender Berührungsfleck rußfrei auf dem einen, rußig auf dem anderen Körper übrigbleibt.

Es seien nun noch einige allgemeinwichtige Stoßfälle besonders betrachtet.

280. Molekülstöße. — Wichtig sind alle Stoßfälle vollkommen elastischer Kugeln besonders deshalb, weil Moleküle bei ihrer Wärmebewegung wie vollkommen elastische Kugeln sich verhalten (W 32). Wegen der Unveränderlichkeit der kinetischen Energie bewirkt jeder solche Stoß einen Austausch von kinetischen Energien, und die Rechnung mit Hinzunahme des Schwerpunktssatzes zeigt, daß in den allermeisten Fällen der Körper mit geringerer kinetischer Energie solche gewinnt und der mit größerer entsprechend verliert[1]). Daher wird im Mittel über viele Stoßfälle ein Ausgleich der kinetischen Energien eintreten. Dies bedeutet für zwei aneinander grenzende Körper, deren Moleküle durch stets wiederholte elastische Stöße aufeinander einwirken, daß die lebendigen Kräfte der Moleküle beider Körper sich ausgleichen werden, wenn sie anfangs ungleich waren. Stoßen sehr viele gleiche, ursprünglich beliebig bewegte, vollkommen elastische Kugeln andauernd aneinander, wie die Moleküle eines Gasvolums, so verteilt sich ihre gesamte kinetische Energie nahe gleichmäßig über alle Kugeln, so daß sie alle eine gewisse mittlere Geschwindigkeit annehmen mit nur geringen Schwankungen um dieselbe[2]).

281. Kugel und Ebene. — Den senkrechten Stoß einer Kugel auf eine feste Ebene kann man wieder nach Schwerpunktssatz und Energiegesetz betrachten (278). Es muß im elastischen Falle die Kugel ohne Verlust von lebendiger Kraft von der Ebene zurückprallen, weil die letztere keine Geschwindigkeit und also auch keine lebendige Kraft annehmen soll. Im unelastischen Falle muß alle lebendige Kraft in Wärme übergehen, weil die Endgeschwindigkeiten gleich werden sollen; die Kugel wird also an der Ebene zur Ruhe kommen.

Ist der Stoß schief (Abb. 65), so zerlege man die Geschwindigkeit v der bei a an die Ebene e e kommenden Kugel m in zwei Komponenten n und t. Die tangentiale Komponente t hat mit dem Stoße unmittelbar nichts zu tun; sie wird also ungeändert bleiben. Die normale Komponente n kehrt sich im elastischen Falle in n_1 um, was mit t die nur in Richtung abgeänderte Geschwindigkeit v_1 gibt, und zwar wird, wie aus den Parallelogrammen leicht zu sehen, Gleichheit von Einfallswinkel α und Reflexionswinkel β bestehen. Es werden also elastische Kugeln von einer Ebene nach dem gleichen Winkelgesetz reflektiert wie Licht. Im unelastischen Falle bleibt t allein übrig; die Kugel gleitet längs der Ebene ab. Ersichtlich ist, daß statt des Gleitens auch Rollbewegung eintreten kann. Dies trifft aber während der Stoßzeit auch im elastischen Falle zu und man sieht daraus, daß beim schiefen Stoße immer Drehbewegungen auftreten können. Hat die an die Ebene stoßende Kugel schon vorher Drehbewegung, so kann sie durch Rollen während der Stoßzeit ihre tangentiale Komponente abändern, was die Gleichheit von Einfalls- und Reflexionswinkel aufheben muß[3]).

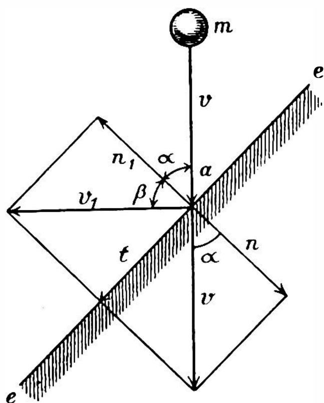


Abb. 65. Stoß einer Kugel auf feste Ebene.

282. Hageldruck. — Es sei noch der Druck betrachtet, welchen ein senkrechter Hagel von vielen Kugeln auf eine Ebene ausübt, die er trifft. Die Stöße seien vollkommen elastisch, so daß die kinetische Energie der Kugeln ungeändert bleibt, wie es beim Stoße der Gasmoleküle auf eine Gefäßwand der Fall ist, die mit dem Gase gleiche Temperatur hat (W 32). Die von einer einzelnen Kugel beim Stoße ausgeübte Kraft ist während der Stoßzeit schnell veränderlich, ebenso wie die elastischen Verformungen es sind; sie ist in der Mitte der Stoßzeit am größten, zu Anfang und Ende derselben Null (279). Bei dem

[1]) Nur wenn die zusammenstoßenden Massen ungleich sind, kann der gegenteilige Fall eintreten. Wenn eine kleine Masse mit wenig Energie eine energiereichere größere einholt, prallt sie mit noch weniger Energie zurück. Ebenso wenn eine in geeignetem Maße größere Masse einer kleineren schnelleren Masse entgegenkommt, kann sie beim Zusammenstoßen Energie an letztere verlieren, obgleich sie schon anfänglich weniger hatte als die kleine.

[2]) Es stellt sich eine gewisse Geschwindigkeitsverteilung unter den Kugeln ein, bei welcher Abweichungen von der mittleren Geschwindigkeit mit zunehmender Größe der Abweichung nach bestimmtem Gesetz (Maxwells Geschwindigkeitsverteilungsgesetz, W 88) seltener werden.

[3]) Solches kommt beim Stoßballspiel (unnötigerweise mit fremd auszusprechendem Namen belegt) oft zur Geltung.

ununterbrochenen, gleichförmigen Hagel sehr vieler Kugeln wird aber eine andauernd gleichbleibende Kraft auf die Ebene ausgeübt, deren Größe leicht zu berechnen ist. Man geht am sichersten vom Grundgesetz (Gl. 115) aus, wonach die Kraft $K = mb$ ist. Hierbei ist für m die innerhalb einer gewissen Zeit t auf die Fläche f treffende Gesamtmasse der Kugeln zu nehmen, und für die Beschleunigung gilt $b = 2v/t$, weil die Geschwindigkeit dieser Masse m innerhalb dieser Zeit t von $+v$ zu $-v$ sich ändert. Es ist also die Kraft $K = 2mv/t$. Der auf die Ebene ausgeführte Druck (257) ist danach $K/f = 2mv/tf = 2Mv$, wobei $M = m/tf$ die in der Zeiteinheit auf die Flächeneinheit treffende Masse ist. Der Druck ist also gleich der doppelten Bewegungsgröße dieser Masse. Dies ist die Grundlage der wichtigen Berechnung des Gasdruckes aus der Bewegung der Gasmoleküle und damit auch die Grundlage zur absoluten Temperaturmessung, worauf wir in der Wärmelehre zurückkommen (W 34).

Wäre der Stoß unelastisch, so wäre die Geschwindigkeitsänderung und also b nur halb so groß und daher der Druck gleich der einfachen Bewegungsgröße Mv.

Muskelkräfte.

283. Es ist angebracht, auch diese Kraftart, von der der Begriff „Kraft" genommen ist (62), besonders zu betrachten, soweit Allgemeinwichtiges davon zu sagen ist.

Der gespannte Muskel arbeitet offenbar wie ein gedehnter, sich zusammenziehender Stab, und insofern ist es klar, daß die Muskelkräfte elastische Kräfte — Molekularkräfte — sind.

Das Besondere ist nur, daß die elastischen Kräfte des Muskels nicht durch vorhergehende Dehnung geweckt werden, sondern durch Nerveneinwirkung derart, daß der Muskel erst bei dieser Wirkung seine großen Kräfte erhält. Dies ist aber erklärlich, wenn man weiß, daß im arbeitenden Muskel chemische Umsetzung vor sich geht; er nimmt Sauerstoff aus dem Blut auf und gibt Kohlensäure und Wasser an dasselbe ab, entsprechend einem Verbrennungsvorgang. Welches die Umsetzungen im Einzelnen auch seien, die Tatsache der Umsetzungen zeigt, daß der Muskel nicht immer aus denselben Molekülen (Atomen) besteht, und offenbar sind es im entspannten Zustande Moleküle, die mit geringen Kräften einander anziehen und im gespannten Zustand andere Moleküle (Atomgruppierungen), die mit sehr großen Kräften einander anziehen, und es ist nicht zu bezweifeln, daß die Nervenwirkung die Umwandlung der einen Molekülsorte in die andere auslöst.

Um einen ähnlichen Fall bekannter Art zu haben, erinnere man sich an die Alkohol- und Wasser-Moleküle (29), die, durch Mischung der beiden Flüssigkeiten in ihre Wirkungsweiten kommend, das Gemisch auf ein so viel kleineres Volum bringen, wie es nur außerordentlich große Druckkräfte von außen her vermocht hätten. Man hat hier ein Beispiel vom Auftreten veränderter Molekularkräfte bei Entstehung neuer Moleküle (in diesem Falle der komplexen Alkohol-Wasser-Moleküle). Oder man denke einen Kautschukfaden, der mit geringer Kraft gedehnt werden kann, plötzlich durch Austausch seiner Moleküle in einen gedehnten Stahldraht verwandelt, der mit sehr großen Kräften sich zusammenzieht, so hat man einen Vorgang derselben Art, wie er beim abwechselnd schlaffen und gespannten Muskel zu denken ist.

Es ist nicht anzunehmen, daß die chemische Umsetzung im arbeitenden Muskel einen sehr großen Teil seiner Moleküle erfaßt; jedoch dürften die wesent-

lichen, mit den großen Kräften sich anziehenden Moleküle kettenförmig in den Muskelfasern angeordnet sein[1]).

Man sieht, wie gering auch die Kenntnis der Einzelheiten der molekularen Umsetzungen im Muskel sei, daß er einen Mechanismus darstellt, der mit den Atom- und Molekularkräften arbeitet, einen Molekular-Mechanismus, den wir auch mit Hilfe des Energiegesetzes noch weiter betrachten werden (W 134). Ähnliches kann von den Nerven gesagt werden, die in ihrer Wirkung als Atom-Mechanismen aufgefaßt werden können; es ist etwa eine von Stelle zu Stelle der Nervenfaser sich fortpflanzende Atomverschiebung, die den Nervenreiz überträgt, ähnlich wie der Schall eine von Stelle zu Stelle sich fortpflanzende Luftverschiebung ist. Daß Atome in chemischer Tätigkeit elektrische Ladungen tragen (E 181 u. f.) und daß dann ihre Verschiebungen elektrische Vorgänge bedeuten, dies gehört zu den gut gesicherten Erkenntnissen, und danach ist es nicht zu verwundern, daß auch rein elektrische Reizung den Muskel ebenso in Tätigkeit bringen kann, wie eine im Lebensvorgang vom Nerv an den Muskel kommende Atomverschiebung. Es darf demnach die Nervenwirkung als ein eigenartig geordneter chemischer und zugleich elektrischer Vorgang aufgefaßt werden, der als solcher ebenso wie die Muskelwirkung immer noch weiter ergründbar sein wird.

284. Sehen wir also in der Muskelbetätigung der Lebewesen nichts grundsätzlich Unbekanntes oder gar über den Gesichtskreis der bisherigen Naturforschung Hinausgehendes, soweit die körperlichen Vorgänge in Betracht kommen, so ist es aber doch etwas anderes, wenn wir den geistigen Einfluß bemerken, dem jene Nerven- und Muskelbetätigung unterworfen ist. Es ist ganz offenbar, daß Nerven- und Muskeltätigkeit bei Menschen und höheren Tieren sehr weitgehend nach freiem Willen dieser Lebewesen erfolgen, und dies fällt vollkommen aus dem Bereich aller bisherigen, ja vielleicht aller möglichen, auch künftigen Naturforschung überhaupt heraus. Die Erkenntnis, daß dem so ist, ist auch als ein Ergebnis der Naturforschung anzusehen[2]): Nur wer weiß, was begriffen ist, weiß auch was trotz aller Kenntnis unbegriffen übrig ist. Jeder unbefangene, aber doch alle Ergebnisse der Naturforschung genügend auch im einzelnen kennende Beobachter irgendwelcher charakteristischer Lebensäußerung, besonders höher entwickelter Pflanzen oder Tiere, muß unmittelbar zugeben, daß hier etwas mitwirke, was den Inhalt aller vorliegenden Naturforschung überschreitet. Wir nennen dieses Etwas Geist. Der Geist eines Lebewesens wird auch seine Seele genannt. Daß ich mit meinen Fingermuskeln schreibe, ist genügend verständlicher Mechanismus; daß dies aber

[1]) Es könnte jede solche Kette auch als ein großes Molekül betrachtet werden, in welchem freilich steter Wechsel der Atome stattfindet, was überhaupt Eigenart lebender Materie ist. Dieser Wechsel bedingt es auch, daß Muskeln nicht darauf eingerichtet sind, Dauerkräfte auszuüben, gleich einer einmal gespannten Feder. Das dauernde Gehobenhalten eines Gewichtes durch die Armmuskeln erfordert dauernd fortgesetzte Nervenreize und entsprechend periodisch erneute Krafterregungen in den Muskelfasern.

[2]) Daß zu Zeiten Naturforscher (freilich niemals die erfolgreichsten) dies Ergebnis verneinen wollten, war Übermut, entsprungen aus offenbarer Überschätzung augenblicklicher Fortschritte der Naturforschung (vgl. Einl. 19). Man dachte sogar Alles aus Bewegungen erklären zu können, die nach den Gesetzen der Mechanik ablaufen, bis der Äther zeigte, daß selbst beim Absehen von der Geisterwelt nicht alles Mechanismus ist (vgl. Einl. 18 und E 129 u. 585).

gerade jetzt geschieht und in der Weise, die meine gewollten Buchstaben mit dem gewollten Sinn hervorbringt, dies ist etwas ganz anderes und würde und wird nie aus Ergebnissen der Naturforschung vorausberechenbar sein. Hier zeigt sich der wesentlich bestimmende Einfluß aus der Geisterwelt. Es ist mein Geist, der meinen Willen und damit auch meine Muskeln leitet. Die Betätigung der dem freien Willen unterworfenen Muskeln erfolgt, wie man weiß, mittels des schon betrachteten Nerven-Mechanismus von den Zentral-Nervenstellen aus (dem Gehirn bei den höheren Tieren). Diese Nervenstellen sind es also, von welchen aus der dem betreffenden Lebewesen eigene Geist besonders auf die Materie des Körpers wirkt; sie sind die Hauptverbindungsstellen von Geist und Körper, die Hauptsitze jener Verknüpfung beider, die „das Leben" bedeutet. In gewissem Maße muß aber solche Verknüpfung auch jeder anderen der meist sehr vielen „Zellen" zugeschrieben werden, die ein Lebewesen aufbauen; jede Pflanze zeigt dies, die keine Zentralnervenstelle hat. Es hat offenbar jede lebende Zelle ihren Geist als Teil des Gesamtgeistes des betreffenden Lebewesens, und die Zellen der Zentralnervenstellen spielen nur eine besonders hervorragende Rolle. Der materielle Inhalt aller Zellen von Lebewesen, in der Hauptsache „Protoplasma" genannt, weist als charakteristisch sehr große, aus außerordentlich vielen Atomen zusammengesetzte Moleküle auf (W 86), die außerdem zu fortdauernder Abgabe und Neuaufnahme von Atomen geeignet sind (W 134). Solche sehr große Moleküle sind es also, die man mit Geist verbunden antrifft; ihnen muß die Fähigkeit zugeschrieben werden, Geist festzuhalten. Kleine Moleküle können nicht Geist festhalten; sie zeigen keine Lebenserscheinungen[1]).

285. Bemerkenswert ist, daß all die großen Veränderungen, die der Mensch auf der Erdoberfläche hervorgebracht hat — einschließlich der Städtebauten und allem was dazu gehört — nur mit Hilfe seiner Muskelkräfte erfolgt sind. Nicht zwar ist alle Arbeit von den Muskelkräften selbst geleistet, sondern die Muskelkräfte haben in stets zunehmendem Maße nur mehr Auslösungsvorgänge (150) betätigt, um andere Energien als die der Muskeln wirken zu lassen. Aber doch ist es so, daß beispielsweise kein Eisenbahnzug in Gang käme ohne daß Muskelkräfte den auslösenden Hebel drehten, und daß selbst Wirkungen, die man als rein geistig aufzufassen pflegt, wie etwa die eines

[1]) Ich weiß wohl, daß ererbtes altgermanisches Denken jedem Ding Leben zuspricht und das All „als lebendige Persönlichkeit" sieht. Auch Kepler hat etwa so gedacht, und dies entspricht auch den jetzigen Kenntnissen des Naturforschers insofern es All-Einheitlichkeit des Geschehens im Weltganzen zum Ausdruck bringt. Will man jedem Atom „Geist" zusprechen, so stünde dem nichts entgegen; es würde dann aber „Geist" etwas anderes bedeuten, als was wir im Vorliegenden mit diesem Wort als Besonderheit der belebten Materie bezeichnen. Der „Geist" toter Materie würde in unserer Ausdrucksweise vielleicht ihr Äther sein, von dem jedes Atom seinen Anteil hat (vgl. Einl. 5, O 4, 23, E 594). Eben weil dieser „Geist" toter Materie in den Bereich der Erforschung gerückt ist, bezeichnen wir ihn mit dem besonderen Namen „Äther", zum Unterschied von den unerforschlich erscheinenden Geistern der Lebewesen, denen wir deshalb aber keineswegs den Zusammenhang mit dem Äther absprechen. Wenn man also sagt: „Alles lebt", so stimmen wir dem zu, mit dem Beifügen, daß das gewonnene Verstehen vom „Leben" derjenigen Dinge, die wir unbelebt nennen — wie das wärmebewegte Wassermolekül oder die um die Sonne kreisende Erde —, eben der Inhalt der Naturwissenschaft — der Physik — ist, während wir vom Leben derjenigen anderen Dinge, die wir belebt nennen, vergleichsweise so gut wie nichts verstehen, was aber auch der einzige Grund ist, der sie uns lieber gesondert halten läßt.

Redners, der größte Volksmassen in Bewegung zu setzen vermag, auch nur mittels der Muskeln, in diesem Falle der der Sprechwerkzeuge des Redners erfolgen. Aller große Einfluß von Geist auf Erden geht durch Muskelkräfte. Geister ohne Muskeln können nicht so viel wirken. So versteht sich dem Denkenden die ihm von innen her verspürbare Empfindung höchster Wichtigkeit der Erhaltung des Lebens und bester Benutzung der kurzen Lebenszeit als einer einzigartig auf Erden ihm gegebenen Gelegenheit des Wirkens.

Reibung bei festen Körpern.

286. Nun ist die Kraftart zu betrachten, die wir bisher immer möglichst ferngehalten hatten, und zwar soll hier die Reibung bei festen Körpern behandelt werden, später gesondert die bei Flüssigkeiten und Gasen (400 u. f.).

Daß Reibung eine Kraftart ist (s. die Definition 62), geht daraus hervor, daß sie Geschwindigkeitsänderungen hervorbringt, z. B. wenn sie, allein wirkend, eine bewegte Masse allmählich zum Stillstand bringt.

Die Reibung bei festen Körpern greift stets an den Berührungsstellen zweier Körper an, die aneinander gleiten oder aufeinander rollen. Man unterscheidet danach gleitende und rollende Reibung.

Die Richtung der Reibungskraft ist immer derart, daß sie vorhandene Geschwindigkeitsunterschiede der beiden Körper vermindert. Kraft und Gegenkraft — auch hier, wie stets, von gleicher Größe und entgegengesetzter Richtung (209) — greifen an denselben Berührungsstellen an, die eine auf den einen, die andere auf den anderen der beiden Körper wirkend.

Wir untersuchen zuerst die gleitende Reibung (287—289).

287. Die Größe der Reibungskraft in ihrer Abhängigkeit von den verschiedenen Bestimmungsstücken kann bei gleitender Reibung mit Hilfe der Vorrichtung Abb. 66 studiert werden. Man belastet die Schale R zunehmend mit Gewichten, bis der Körper P auf der Unterlage U in Bewegung kommt, und zwar soll es gleichförmige Bewegung sein. Es ist dann das Gesamtgewicht R gleich der zu messenden Reibungskraft beim Statthaben der Geschwindigkeit eben dieser gleichförmigen Bewegung; denn nur bei entgegengesetzter Gleichheit dieser beiden Kräfte ist die resultierende Gesamtkraft und damit nach dem Grundgesetz auch die Beschleunigung Null.

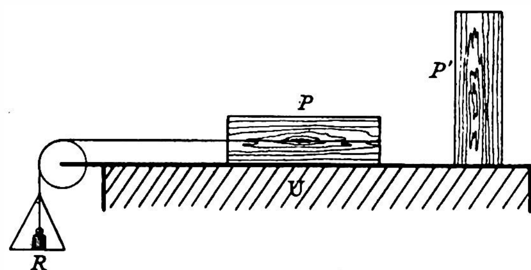


Abb. 66. Gleitende Reibung.

Man kann bemerken, daß dies dieselbe Überlegung ist, nach welcher die trotz dauerndem Ziehen der Lokomotive doch nur gleichbleibende Geschwindigkeit des Eisenbahnzuges in voller Fahrt auf horizontaler Strecke in Übereinstimmung mit dem Grundgesetz sich zeigt. Wer in solchen Fällen die Beschleunigung als Wirkung der ziehenden Kraft vermißt, übersieht die mitwirkende Kraft der Reibung.

Man beobachtet bei Reibungsversuchen der beschriebenen Art etwas Besonderes: War P auf U anfänglich in vollständiger Ruhe, so ist eine besondere große Kraft R nötig, um P überhaupt in Bewegung zu bringen; tritt aber bei gesteigertem Gewicht R die Bewegung ein, ist sie sofort stark beschleunigt, was anzeigt, daß R jetzt zu groß ist für Gleichgewicht, daß also bei vorhandener Bewegung die Reibung kleiner ist als von der Ruhe aus. Man sagt: es gibt eine besonders vergrößerte „Reibung der Ruhe". Diese letztere wird durch das Gewicht R gemessen, welches die erste Bewegung hervorbringt. Will man die Reibung der Bewegung messen, so muß man den Zustand vollkommener Ruhe vermeiden, etwa indem man U dauernd beklopft[1]), während das Gewicht R variiert wird.

Man findet so, daß die Reibungskraft nur wenig von der Geschwindigkeit, die P gegen U hat, abhängt, sobald nur überhaupt Bewegung vorhanden ist. Bei sehr großer Geschwindigkeit können Besonderheiten eintreten (s. 288).

Sehr bemerkenswert ist, daß die Reibungskraft unabhängig ist von der Größe der reibenden Fläche; es macht keinen Unterschied für R, ob P in der bisher betrachteten Lage ist oder auf die hohe Kante gestellt, wie P′ es zeigt.

Wichtig und einfach ist die Abhängigkeit der Reibungskraft von der Größe der Kraft, welche die beiden Körper, P und U, aufeinanderpreßt und die wir pressende Kraft nennen wollen. Dieselbe war bei den bisher gedachten Versuchen durch das Gewicht des Körpers P gegeben; man kann sie leicht verändern, indem man Zusatzgewichte auf P legt. Man findet so, daß die Reibungskraft unter sonst gleichen Umständen proportional der pressenden Kraft ist, so daß das Verhältnis beider, R/P, konstant ist.

Dieses Verhältnis gibt daher ein von Flächengröße und pressender Kraft unabhängiges Maß für die Reibung der betreffenden beiden Stoffe aufeinander; es wird der Reibungskoeffizient dieser Stoffe genannt.

Man kann den Reibungskoeffizienten auch mittels einer schiefen Ebene messen, die aus dem einen Stoffe besteht und auf der der andere gleiten kann. Aus Abb. 10 wird klar, daß die Kraft q_1 dort die zur Berührungsfläche senkrechte pressende Kraft ist, die Kraft $p = p_1$ aber die tangentiale Reibungskraft, so daß $\operatorname{tg}\alpha = p/q_1$ den Reibungskoeffizienten gibt, wenn man die Schiefe α solange steigert, bis der aufgelegte Körper abzugleiten beginnt (Reibung der Ruhe) oder bis er unter genügender Erschütterung eine gleichbleibende, mäßige Geschwindigkeit annimmt (Reibung der Bewegung).

Tab. 9 zeigt einige Reibungskoeffizienten, bei denen übrigens immer zu bedenken ist, daß sie gänzlich von der Oberflächenbeschaffenheit der betreffenden Körper abhängen und daß Oberflächen an der Luft sehr stark der Anlagerung von Wasserschichten und Schichten anderer fremder Stoffe ausgesetzt sind, die die Reibung stark abändern können. Als charakteristisch sieht man aber die meist große Reibung gleicher und die kleinere ungleicher Körper (2. und 3. Zeile), sowie die manchmal sehr stark vergrößerte Reibung der Ruhe. Letztere ist wichtig, wo Reibung ohne Gleiten wirken soll, wie bei den Lokomotivrädern auf den Schienen und bei der Energieübertragung in den Riemen- oder Seil-Vorgelegen. Tritt hier einmal infolge zu großer Kräfte Gleiten ein, so hört es ohne Abstellen der Kraft nicht auf; denn durch die Bewegung ist die Reibung nur noch verringert.

Tab. 9. **Reibungskoeffizienten.**

	Ruhe	Bewegung
Holz auf Holz		0·25
Schmiedeeisen „ Schmiedeeisen		0·44
Schmiedeeisen „ Bronze	0·19	0·18
Leder „ Eiche	0·47	0·27
Hanfseil „ Eiche	0·80	0·52
Leder „ Gußeisen	0·28	
Stein „ Stein	0·70	

[1]) Man beklopft auch in sich unbewegte Zeigerinstrumente (wie z. B. Aneroidbarometer), um die vergrößerte Reibung der Ruhe in deren Zapfen oder Gelenken auszuschalten.

288. Die erfahrungsmäßig festgestellten Eigentümlichkeiten der Reibung erscheinen verständlich, wenn man bedenkt, daß alle Körper aus Molekülen (Atomen) aufgebaut sind und also auch auf glattesten Oberflächen Rauhigkeiten von molekularer Größenordnung aufweisen müssen. Diese Rauhigkeiten greifen an Berührungsflächen ineinander ein, etwa wie zwei Zahnstangen ineinander eingreifen. So roh dieser Vergleich sein mag, jedenfalls trifft er in vielem zu. Die Arbeitsleistung gegen Reibung erscheint danach als Arbeitsleistung gegen die pressende Kraft, indem dieser entgegen ein immer wieder erneutes Hinwegheben über die molekularen Unebenheiten erfolgen muß. Die Arbeit auf der Wegeinheit und also die Reibungskraft (vgl. Gl. 89) muß somit proportional der pressenden Kraft sein, außerdem aber von der Zahl der Unebenheiten auf der Wegeinheit und von deren Beschaffenheit, somit vom molekularen Bau der reibenden Stoffe abhängen, wobei man voraussagen würde, daß gleiche Stoffe mehr Reibung ergeben als ungleiche, weil im ersteren Fall besseres Ineinandergreifen der molekularen Unebenheiten stattfinden muß. Die Unabhängigkeit von der Flächengröße erscheint selbstverständlich; denn die Summe aller Hubhöhen gegen die pressende Kraft auf der Wegeinheit wird durch die Flächengröße nicht geändert. Auch die Geschwindigkeitsabhängigkeit erscheint verständlich: Ist Ruhe vorhanden, so kann dauernde größere Annäherung der Moleküle der beiden Körper und damit wesentliches Hinzukommen von Molekularkräften zur pressenden Kraft erfolgen, was die Reibungskraft vergrößern muß. Mittlere Geschwindigkeiten verschiedener Größe lassen nicht viel Änderung der Reibungskraft erwarten; denn die längs der Wegeinheit zu leistende Reibungsarbeit kann von der Geschwindigkeit, mit der sie geleistet wird, nicht abhängen, solange die pressende Kraft und die in ihrer Richtung zurückgelegten Wege ungeändert bleiben. Bei sehr großen Geschwindigkeiten kann Verkleinerung dieser Wege — und damit der Reibung — eintreten, weil keine Zeit zu völligem Ineinandergreifen der Unebenheiten bleibt; es kann aber auch Arbeit gegen Molekularkräfte hinzutreten, was die Reibung vergrößern muß, wenn etwa ein Verpulvern (Abschleifen) an den reibenden Oberflächen eintritt.

289. Hier kann auch die in den Anwendungen zur Reibungsverminderung so wichtige Wirkung der flüssigen, zwischen die reibenden Oberflächen zu bringenden „Schmiermittel" betrachtet werden. Man sieht ein, daß ein gutes Schmiermittel das Ineinandergreifen der molekularen Unebenheiten, aber auch das Wirksamwerden der Molekularkräfte der reibenden Körper zu verhindern hat. Es muß dazu Moleküle haben, die zu denen der reibenden Körper in gewisser Weise passen. Wasser ist für die meisten Fälle ein sehr schlechtes Schmiermittel; es scheint stark die Wirkung der Molekularkräfte zu vermitteln (vgl. 248). Seifenlösung ist viel besser. Für Metalle, besonders in Achsenlagern, werden Öle benutzt. Schmiermittel dürfen weder zu dünnflüssig sein, um nicht weggepreßt zu werden, noch aber auch zu dickflüssig, da sie sonst zu viel innere Reibung in sich selbst ergeben. Schaltet das Schmiermittel die Wirkung der molekularen Unebenheiten der festen Körper ganz aus, so bleibt überhaupt nur mehr die — gesondert zu betrachtende — innere Reibung der Flüssigkeit übrig (400), und dann sind auch die Abhängigkeiten der Reibungskraft verändert. Die Reibungskraft muß dann mit der Flächengröße und der Geschwindigkeit wachsen, dagegen weniger von der pressenden Kraft abhängen.

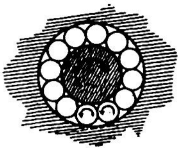


Abb. 67. Kugellager.

290. Die rollende Reibung ist stets sehr viel kleiner als die gleitende. Die molekularen Unebenheiten hindern nicht das Rollen, so wie ein Zahnrad ohne Hindernis auf einer Zahnstange rollt. Will man Reibung möglichst verringern, so macht man sie nach Möglichkeit rollend. Jedes Fuhrwerk mit Rädern ist ein Beispiel davon[1]). Es bleibt dann nur mehr die Achsenreibung als gleitende Reibung übrig. Will man auch diese rollend machen, so wendet man Kugellager an (Abb. 67), bei welchen ein zwischen Achse und Lagerbüchse

[1]) Der Wagen auf horizontaler Straße braucht Arbeitsleistung hauptsächlich als Hubarbeit über die Unebenheiten der Straße. Diese Arbeit ist — ganz wie es vorher für die molekularen Unebenheiten bei der gleitenden Reibung überlegt wurde — proportional der pressenden Kraft, d. i. dem Gesamtgewicht des Wagens. Ähnlich ist beim Gehen auf horizontalem Weg hauptsächlich Hubarbeit der Beine über die Unebenheiten des Weges zu leisten. Beim Eisenbahnzug und auch sonst bei schnellen Fahrzeugen kommt überwiegend die mit großen Geschwindigkeiten sehr schnell ansteigende Luftreibung in Betracht (vgl. 409).

freigelassener Raum mit rollenden Stahlkugeln ausgefüllt ist. Zwar gleiten benachbarte Kugelflächen dabei aneinander vorbei (siehe die Pfeile in der Abbildung), jedoch ist hier keine pressende Kraft senkrecht zur Gleitfläche vorhanden und somit auch keine Reibungskraft.

291. Reibung ist — nächst dem unelastischen Stoß (277) — der zweite Vorgang innerhalb der Mechanik, der kinetische Energie verschwinden läßt, ohne daß dafür potentielle Energie auftritt. Auch hier ist es wieder die Energieform Wärme, welche — entsprechend dem Energiegesetz — Ersatz bietet. Reibung liefert stets Wärme. Daß dem so ist und zwar auch im richtigen Maße, dies war eine für die Begründung des Energiegesetzes besonders wichtige Feststellung, worauf wir in der Wärmelehre eingehen (W 68 u. f.).

Reibung wird in allen Bremsvorrichtungen benutzt, wenn kinetische Energie absichtlich zum Verschwinden kommen soll.

292. Eine Anwendung der Reibung zu Arbeitsmessung findet man im „Bremsdynamometer". Soll die Arbeit gemessen werden, welche irgendein Motor leistet, so versieht man seine Hauptachse (A im Querschnitt, Abb. 68) oder ein mit derselben verbundenes Rad mit einer reibenden Umrahmung U, die mit regulierbarer Kraft (z. B. mittels der Schraube S) an die Achse, bzw. den Umfang des Rades gepreßt werden kann. Die Umrahmung trägt einen Hebelarm H mit einer Schale, auf welche Gewichte gesetzt werden können. Schale, Arm und Umrahmung sind durch ein Gegengewicht q ins Gleichgewicht gesetzt, so daß sie bei ruhendem Motor kein Drehmoment um die Achse A ergeben. Es wird nun bei laufendem Motor die pressende

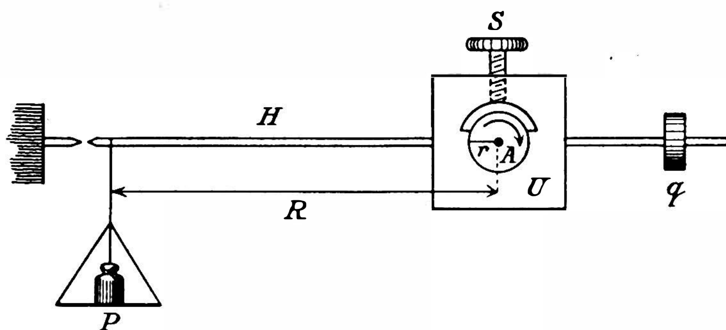


Abb. 68. Bremsdynamometer.

Kraft und damit die Reibung zwischen A und U so reguliert, daß die ganze zu messende Arbeit des Motors in dieser Reibung aufgeht[1]). H ist dabei durch einen Anschlag festgehalten. Legt man jetzt auf die Schale von H so viel Gewichte P, daß dieser Arm frei wird und Gleichgewicht mit der Reibungskraft K eintritt[2]), so kann die Reibungsarbeit und damit die Arbeit des Motors leicht berechnet werden. Es ist wegen des Gleichgewichts, da die Reibungskraft K den Arm r, das Gewicht P den Arm R hat, $PR = Kr$ und daher $K = PR/r$. Die Arbeit bei einer Umdrehung der Motorachse wird daher sein $K \cdot 2r\pi = 2\pi PR$. Multipliziert man diese Arbeit mit der besonders zu ermittelnden sekundlichen Drehzahl der Achse, so erhält man die in einer Sekunde vom Motor geleistete Arbeit und zwar in mkgr/sek, wenn R in m, P in kgr gemessen ist.

293. Leistung. — Es kann bei dieser Gelegenheit auch der besonders für Motoren und sonstige Energiequellen wesentliche Begriff der (Energie-)Leistung festgelegt werden. Man versteht darunter das Verhältnis von gelieferter Energiemenge zur Zeit, in welcher sie geliefert

---

[1]) Bei einiger Größe dieser Arbeit muß für Kühlung der Reibungsstelle gesorgt sein.

[2]) Es werden zweckmäßigerweise außer dem erwähnten Anschlag Federungen an H angebracht, welche unnötig weite Ausschläge bei Abweichungen vom Gleichgewicht verhindern.

wird. Ein Pferd kann z. B. 75 kgr in 1 sek 1 m hoch heben, es kann also 75 mkgr/sek leisten. Diese Leistung wird als technische Leistungseinheit benutzt und „Pferdekraft" (Pferdestärke, PS) genannt; es ist 1 PS = 75 mkgr/sek. Man erhält darnach die Leistung eines Motors in PS, wenn man die in mkgr/sek gemessene Leistung (292) durch 75 dividiert.

Gleichgewicht und Molekularkräfte bei Flüssigkeiten (Hydrostatik).

294. Flüssigkeiten haben keine Formelastizität. — Ein flüssiger Körper unterscheidet sich von einem festen im wesentlichen durch die innere Beweglichkeit oder, was dasselbe ist, durch das Fehlen einer bestimmten Form. Jeder feste Körper strebt seine einmal erhaltene Form mit den vorher betrachteten Kräften der Formelastizität (262, 272) beizubehalten; eine Flüssigkeitsmasse nimmt aber jedesmal die beliebige Form des Gefäßes an, in welches sie gegossen wird. Das Fehlen von Formelastizität ist es also, welches die Flüssigkeiten von den festen Körpern unterscheidet. Dagegen stimmen beide Aggregatzustände im Vorhandensein von Volumelastizität überein; eine gegebene Flüssigkeitsmenge kann ebensowenig ohne weiteres auf beliebiges Volum gebracht werden wie ein fester Körper (312 u. f.).

Wir werden weiter unten diese Haupteigenschaften des flüssigen Zustandes in bezug auf die Kräfte und die Bewegungen der Moleküle deuten (315 u. f.)[1]) und wir werden dabei auch besondere Erscheinungen untersuchen, die ein gewisses eigenes Formstreben der Flüssigkeiten zeigen, das allerdings nur an der Oberfläche sitzt und dem nur sehr geringe Kräfte eigen sind.

Vorerst entwickeln wir die große Menge von Einzelergebnissen, die allein schon aus der Tatsache des völligen Fehlens innerer Formelastizität folgen (295 bis 311). Es sind dies Sätze, die sich sämtlich auf innerlich ruhende Flüssigkeiten beziehen; sie machen die Hydrostatik aus. Vieles davon ist schon im Altertum gefunden worden. Wie im allgemeinen, so ist auch für die Flüssigkeiten die Statik älter als die Dynamik.

295. Oberster Satz der Hydrostatik ist dieser: Im Inneren einer ruhenden Flüssigkeit gibt es nur normale Kräfte, keine tangentialen (vgl. 269). Denn wären Kräfte mit tangentialen Komponenten vorhanden, so würden letztere nach Art der Torsionskräfte (vgl. 268 und Abb. 62c) wirken: sie würden Formänderung des betreffenden Raumelements hervorzubringen streben (272). Dem setzt aber das Raumelement mangels Formelastizität keine Kräfte entgegen; es wird daher niemals Gleichgewicht werden, sondern immer weiter fortschreitende Formänderung eintreten, solange tangentiale Kräfte vorhanden sind. Ist also Ruhe in der Flüssigkeit, sind ihre Raumelemente im Gleichgewicht, so können keine tangentialen, nur normale Kräfte da sein. Dabei ist es gleichgültig ob man Kräfte an Gefäßwänden oder an irgendwelchen in der Flüssigkeit gedachten Flächen betrachtet; die Kräfte können bei Ruhe immer nur normal sein.

---

[1]) Die Kenntnis, welche man aus elektrischen und optischen Untersuchungen über die Atome und Moleküle erlangt hat, ist scheinbar eingehend; ihre große Unvollkommenheit geht aber schon daraus hervor, daß sie nicht ausreicht, um auch nur das Bestehen eines solchen besonderen Aggregatzustandes, wie es der flüssige ist, vorauszusehen. Vielmehr wird man umgekehrt auch aus den Eigenschaften der Aggregatzustände immer weiter suchen müssen, die Moleküle und Atome besser zu begreifen.

296. Hieraus folgt im besonderen, daß die Oberfläche einer im Gleichgewicht befindlichen Flüssigkeit senkrecht stehen muß zur Resultierenden der Kräfte, die auf die Oberfläche wirken.

So stehen die Oberflächen auf der Erde ruhender Flüssigkeiten genau senkrecht zur Lotlinie, sofern auf die Flüssigkeit dieselben Kräfte wirken wie auf das Lot; wo andere Kräfte wesentlich mitwirken, wie in der Nähe von Gefäßwänden (315 u. f.), ist es anders. Man sehe hierzu auch die bereits früher betrachteten Beispiele (198, 203; Abb. 45 und 46).

297. Allseitigkeit des Druckes im Inneren ruhender Flüssigkeiten. — Die nach vorigem Satz (295) allein möglichen normalen Kräfte in der ruhenden Flüssigkeit können aber nicht beliebig verteilt sein. Sie dürfen keine Formänderungen der Raumelemente geben, was Bewegung bedeuten würde, sondern nur Volumänderungen, wie bei Kompression (266), gegen welche die Flüssigkeit standhält. Die normalen Kräfte müssen also so verteilt sein, daß sie — wie in Abb. 62b — nach allen drei Raumrichtungen gleichen Druck geben. Da aber die Raumrichtungen beliebig wählbar sind, folgt Gleichheit des Druckes in allen Richtungen an jedem Punkte in einer ruhenden Flüssigkeit.

298. Von außen her auf eine Flüssigkeit ausgeübter Druck — etwa mit einem Stempel in zylindrischem Gefäß — **verbreitet sich durch das ganze Innere einer ruhenden Flüssigkeit überallhin in gleicher Größe.** — Dieser wichtige Satz ist nach dem Vorhergehenden unmittelbar einzusehen. Denn Druckungleichheiten in der Flüssigkeit würden auch ungleiche Drucke an gegenüberliegenden Grenzflächen der Raumelemente bedeuten, und dies würde von Null verschiedene resultierende Kräfte auf die Raumelemente ergeben, wonach sie nicht in Ruhe sein könnten.

Ruhe bei Druckungleichheit könnte nur sein, wenn noch besondere Kräfte auf die Raumelemente wirken, die die Resultierende der Druckkräfte zu Null bringen, — ein Fall den wir nachher betrachten (300).

Daß der überall hin verbreitete äußere Druck auch überall allseitig und normal ist, folgt nach 297 und 295.

299. Ein bemerkenswertes Anwendungsbeispiel des Satzes 298 ist die hydraulische Presse. Sie besteht aus zwei ungleich weiten Zylindern mit Kolben (z und Z, Abb. 69) die durch ein Rohr miteinander verbunden sind. Aller Raum von einem Kolben bis zum anderen ist mit einer Flüssigkeit (Wasser oder Öl) gefüllt. Es seien die Flächengrößen der beiden Kolben 1 cm² und 100 cm². Wird nun auf den kleinen Kolben von außen her eine Kraft ausgeübt, z. B. 1 kgr, was einem Druck von 1 kgr/cm² = 1 Atm. ergibt, so steht nach 298 das ganze Flüssigkeitsvolum unter diesem Druck, der nach 297 auch allseitig ist. Im Besonderen hat auch jedes cm² der Begrenzung der Flüssigkeit diesen Druck, d. i. 1 kgr Kraft auszuhalten, und es muß — durch den Druck elastisch verbogen — 1 kgr Gegenkraft hergeben, wodurch Gleichgewicht zustande kommt. Auch auf jedes cm² des großen Kolbens entfällt 1 kgr Kraft; im ganzen wird er also mit 100 kgr gedrückt werden, und diese große Kraft steht demnach an dem großen Kolben zur Verfügung, sobald nur die kleine Kraft von 1 kgr auf den kleinen Kolben ausgeübt wird.

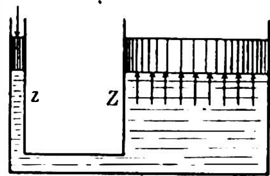


Abb. 69. Hydraulische Presse.

Man sieht, daß die Vorrichtung wie eine der früher (80) betrachteten Maschinen wirkt; sie ist geeignet eine gegebene Kraft zu vervielfältigen, und es ist in der Tat zu jenen 6 einfachen, aus festen Körpern gebauten Maschinen die hydraulische Presse als eine besondere Flüssigkeits-Maschine hinzuzufügen.

Das Übersetzungsverhältnis (82) wäre in unserem Beispielsfall 1:100. Im selben Ver-

hältnis, in welchem mit Kraft gespart wird, muß aber auch hier an Weg zugegeben werden (vgl. 88); denn senkt sich der kleine Kolben etwa um 1 cm, so wird 1 cm^3 Flüssigkeit zum großen Kolben hingepreßt, was aber dort, wegen der großen Fläche nur 1/100 cm Hebung ergeben kann. Das Produkt aus Kraft und Weg, die Arbeit, bleibt also auch bei dieser Maschine ungeändert (wie 90).

Außer zur Ausübung großer Kräfte, z. B. zur Hebung großer Lasten, ist die hydraulische Presse auch zur Hervorbringung sehr hoher Drucke geeignet. Läßt man die Kraft des großen Kolbens auf einen kleinen Stempel wirken, der in einen sehr starkwandigen Stahlzylinder paßt, so erreicht man in diesem Zylinder leicht 1000 Atm. Druck, so wenn z. B. ein Hebel am kleinen Kolben der Presse mit 10 kgr drückt und der Stempel des Stahlzylinders 1 cm^2 Querschnitt hat[1]).

Unter so hohen Drucken kann fast aus jedem Pulver (z. B. auch aus Metallfeilicht) ein zusammenhängendes festes Stück gepreßt werden („Pastille"), weil die Teile des Pulvers in genügendem Maße innerhalb ihre molekularen Wirkungsweiten kommen, so daß die Molekularkräfte wirksam werden (247, 248). In Räumen so hohen Drucks zerbricht nichts, und was zerbrochen ist wird ganz; denn es bleiben hier keine Zugkräfte mehr übrig, nur Druckkräfte, und wo Zug fehlt findet kein Überschreiten der Elastizitätsgrenze statt (273).

300. Flüssigkeiten unter dem Einfluß der Schwere. — Wichtig ist der Fall, daß Flüssigkeiten nicht nur äußeren Drucken unterworfen sind, sondern auch Kräften, die in ihrem ganzen Volum angreifen. Dies ist sogar der gewöhnliche Fall; denn die Schwere ist als solche Kraft auf der Erdoberfläche immer vorhanden. Wegen der Allgemeinwichtigkeit dieses Falles betrifft ein großer Teil des Folgenden (301—311) Flüssigkeiten, die unter dem Einfluß der Schwerkraft stehen.

Es befinde sich in dem Gefäß g g (Abb. 70) Flüssigkeit vom spez. Gewicht s mit der Oberfläche o o, welche nach früherem Satze (296) horizontal steht.

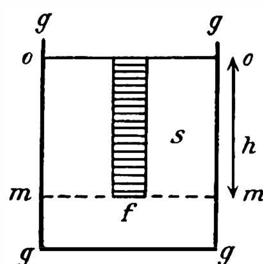


Abb. 70. Druck durch die Schwere der Flüssigkeit.

Wir betrachten die Kraftwirkungen auf den schraffierten, prismatischen Teil der Flüssigkeit mit der Höhe h und der beliebig geformten Grundfläche f, also dem Volum h · f und dem Gewicht h · f · s. Ein äußerer Druck, etwa von der Oberfläche her auf die Flüssigkeit ausgeübt (z. B. der Luftdruck), ergibt nach dem vorigen Satze (298) die resultierende Kraft Null, weil er von allen Seiten in gleicher Größe auf das betrachtete Volum wirkt. Da aber das Volum mit der Kraft seines Gewichtes hfs nach unten gezogen wird, muß für den Fall des inneren Ruhezustandes der Flüssigkeit, den wir untersuchen, eine gleich große, nach oben gerichtete Kraft auf das Volum wirken, damit die Resultierende sämtlicher Kräfte Null sei[2]). Diese Kraft muß, da sie nach dem

[1]) Man erreicht so mit gewöhnlichen Stahlstempeln Drucke bis zu etwa 20000 Atm. Besonders geeignete Stempel geben vielleicht 100000 Atm. Bei so hohen Drucken können anfänglich nicht schon sehr große spezifische Gewichte (wie bei K, Rb) fast aufs Doppelte kommen.

[2]) Man kann hier sowie im folgenden einwenden, daß die an einem Flüssigkeitsvolum angreifenden Kräfte zusammengesetzt werden wie an einem festen Körper, während das Volum in Wirklichkeit innere Bewegungen zuläßt. Diesem Einwand begegnet man nur äußerlich durch Zerlegung des Flüssigkeitsvolums in Volumelemente und Einzelbetrachtung derselben. In Wirklichkeit greifen die zusammenzusetzenden Kräfte gar nicht an großen oder kleinen Flüssigkeitsvolumen an, sondern an den Molekülen der Flüssigkeit, die aber den hier zu betrachtenden Kräften gegenüber im Endergebnis in der Tat wie feste, innerlich nicht weiter bewegliche Körper sich verhalten. Der Druck in der Flüssigkeit wird durch die umgebenden Moleküle ausgeübt; die Gravitation greift an der Masse der Moleküle an.

obersten Satze (295) nur normal sein kann, an der unteren Grundfläche f des Volums angreifen; sie kann aber in der ruhenden Flüssigkeit nur als dort allseitig gleicher Druck vorhanden sein (297). Die Größe dieses Druckes, gegeben durch den Quotienten Kraft/Fläche, ist $h \cdot f \cdot s/f = h \cdot s$. Es muß also in der Horizontalschicht m m, d. i. in der Tiefe h unter der Oberfläche, ein um $h \cdot s$ größerer Druck vorhanden sein als oben in der Schicht o o.

Wir haben danach das Ergebnis, daß in jeder unter dem Einfluß der Schwerkraft stehenden Flüssigkeit ein von oben nach unten zunehmender Druck vorhanden sein muß, und zwar ist die Größe der Druckzunahme gegeben durch den Höhenunterschied h multipliziert mit dem spezifischen Gewicht s der Flüssigkeit.

301. Andere Herleitung des Satzes vom Druck der Flüssigkeitssäulen. — Man kann auch die ganze Flüssigkeit in beliebig geformtem Gefäße in horizontale, sehr dünne Schichten zerlegt denken. Jede Schicht drückt auf alle darunter liegenden mit ihrem Gewicht, wie von außen her, so daß nach 298 unter jeder beliebigen Horizontalebene, wie m m, der Druck aller oberen Schichten gleichmäßig und allseitig ausgebreitet sich vorfinden muß. Bei der Größenberechnung des Druckes fällt wieder, wie vorher, die Flächengröße und Form der Schichten heraus; jede Schicht von der Dicke h liefert die Drucksteigerung $h \cdot s$ nach unten, wie auch das Gefäß geformt sei, wenn nur in der ganzen Höhe h zusammenhängende Flüssigkeit sich befindet.

Man kann das Ergebnis passend für alle Anwendungen dahin aussprechen, daß der Druck p einer Flüssigkeitssäule nur von deren Höhe h und dem spezifischen Gewicht s der Flüssigkeit abhängt und gleich $h \cdot s$ ist:

$$p = h \cdot s. \qquad 301)$$

302. Prüfung mit der Waage. — Der Druck von Flüssigkeitssäulen kann mit der Waage nachgemessen werden, wie es schon Stevin getan hat, wobei einige Folgerungen von 301 verblüffend (paradox) erscheinen, aber doch zutreffend sich zeigen.

Die eine Schale der Waage (Abb. 71) ist als ebene Platte P ausgebildet, die flüssigkeitsdicht an den unteren Rand der an dem Arm A befestigten Fassung F schließt, ohne daran zu haften. Auf die Fassung können verschiedene Gefäße a, b, c, d geschraubt werden, deren Boden dann die Platte P ist.

Berechnet man nach $h \cdot s$ den Druck einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht s (gr/cm³), welche man bis zur Höhe h (cm), stets senkrecht gemessen, in eines der Gefäße gießen kann, und multipliziert man diesen Druck ([gr/cm³] · cm = gr/cm²) mit der Größe der benetzten Fläche der Platte P (cm²), so erhält man die zu erwartende Kraft auf P, welche (in gr) auf der anderen Waagschale W kontrolliert werden kann. Man findet in der Tat, wenn das berechnete Gewicht auf W gelegt ist, daß man Flüssigkeit bis zur angenommenen Höhe h in das Gefäß gießen kann, um Gleichgewicht zu haben. Mehr eingegossene Flüssigkeit fließt unten von selber wieder heraus; die Höhe h (und verständlicherweise auch weniger) wird aber bei jeder Gefäßform so dauernd gehalten als P dicht an F paßt.

Beim Gefäß a, dessen Querschnitt überall gleich der benetzten Fläche von P sei, ist das Ergebnis wenig verwunderlich, insofern — wie leicht einzusehen — die darin befindliche Flüssigkeit eben das berechnete Gewicht hat, welches auf W

gelegt wurde. Beim Gefäß b ist schon bemerkenswert, daß die Flüssigkeitssäule schief liegt und doch bei gleicher Höhe gleichviel drückt; beim Gefäß c fällt auf, daß sehr viel mehr Flüssigkeit nicht mehr Gewicht auf der anderen Waagschale erfordert, bei d dagegen besonders, daß so wenig Flüssigkeit auch das gleiche Gewicht gibt.

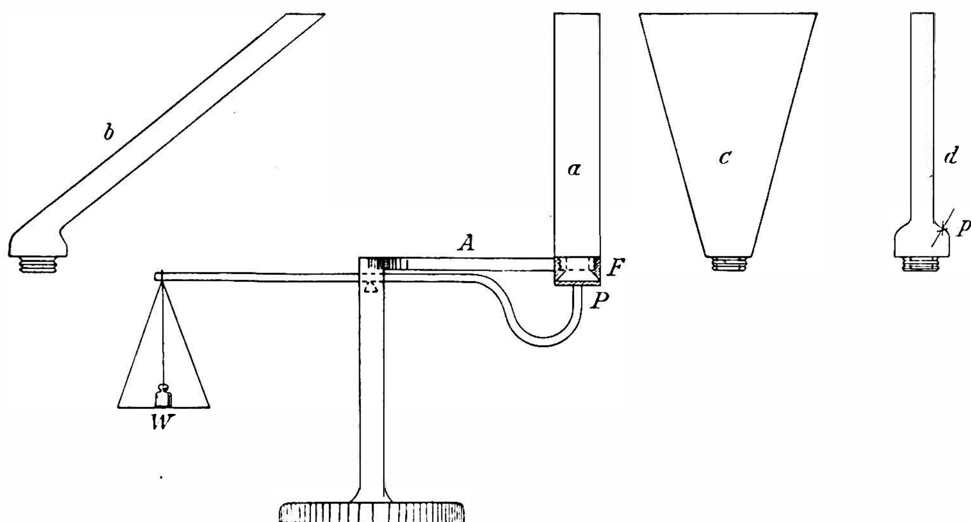


Abb. 71. Druck von Flüssigkeitssäulen.

303. Die Verwunderlichkeit (das „hydrostatische Paradoxon") fällt weg, wenn man die Mitwirkung der Gefäßwände betrachtet, die nach vorhergegangenen Überlegungen leicht zu verstehen ist. Beim Gefäß d z. B. bewirkt die über der Horizontalebene des Wandpunktes p stehende Flüssigkeit einen ihrer Säulenhöhe entsprechenden normalen Druck auf die Wand; dadurch wird die Wand elastisch ein wenig nach oben verbogen, so daß ihre elastische Kraft entgegengesetzt gleich der Kraft des Flüssigkeitsdruckes wird, wie es die beiden Pfeile in der Abb. andeuten, womit aber dann alles in der Flüssigkeit unterhalb p genau ebenso ist, als wäre bei p keine Wand, sondern dort und senkrecht darüber auch drückende Flüssigkeit, wie im Gefäß a.

304. Was die Größe des Druckes beispielsweise von Wassersäulen betrifft, so findet man aus Höhe mal spezifischem Gewicht (301) leicht, daß 1 dm Wasser nur $10\,gr/cm^2 = 0.01$ Atm. drückt und daß erst 10 m Wasserhöhe 1 Atm. Druck ergibt. Es ist daraus klar, daß man oft, z. B. in der hydraulischen Presse, die vom Gewicht der Flüssigkeit stammenden Drucke außer acht lassen kann. Wo aber große Flüssigkeitssäulen vorkommen, wird der Druck beträchtlich. So findet man im Meere der Erde Tiefen von 8000 m, was beim erhöhten spez. Gewicht des Meerwassers Drucke über 800 Atm. am Meeresboden gibt. Eine Flasche gewöhnlicher Art, fest verschlossen und nur Luft enthaltend, muß bei Versenkung auf dem Meeresboden zerdrückt werden. Die Schwierigkeit von Taucherarbeit in großen Wassertiefen liegt in der Abwehr des großen Druckes. Tiefseetiere jedoch, die nicht auf Luftatmung angewiesen sind, werden von dem Drucke, der auch in ihrem Inneren ist, so wenig zerstört wie das Meerwasser selbst. In der Schwimmblase der Tiefseefische ist Gas von einem ihrer Aufent-

haltstiefe entsprechenden Druck; werden sie plötzlich hochgebracht, so sterben sie wegen übermäßiger Dehnung oder Zersprengung der Schwimmblase.

305. Noch sehr viel höhere Drucke müssen im Inneren der großen flüssigen Himmelskörper sein. Daß aber auch bei festem Inneren der Druck nicht sehr viel kleiner sein kann als für den flüssigen Zustand zu berechnen ist, dies ist nach dem Verschwinden der Molekularkräfte gegenüber der Gravitation bei großen Massen anzunehmen (265). Bei der Berechnung des Druckes im Mittelpunkt von Himmelskörpern nach Gl. 301 ist die Abnahme der Schwerkraft im Inneren (210) und die Nichteinheitlichkeit des spezifischen Gewichts zu berücksichtigen; es geschieht dies mit Annäherung, wenn der halbe Radius des Himmelskörpers als Höhe h und das mittlere spez. Gewicht s eingesetzt werden. Man findet so für die Erde rund 2 Millionen Atm., für die Sonne 1400 Millionen Atm. und für den größten genügend bekannten Fixstern, α im Orion, 30 Billionen Atm.

Die Eigenschaften der Materie unter so hohen Drucken sind durch Versuche nicht ermittelbar (vgl. Fußnote zu 299); sie sind unbekannt. Die Größen der mittleren spez. Gewichte der Gestirne (213) zeigen aber, daß die Materie trotz der hohen Drucke im Inneren doch nicht wesentlich mehr verdichtet sein kann als unter gewöhnlichem Druck[1]); die Atome bewahren also, wenigstens überwiegend, ihre gegenseitige Undurchdringlichkeit. Elemente, deren Atome bei gewöhnlichem Druck ziemlich viel Raum einnehmen im Verhältnis zu ihrem Gewicht, wie K und Rb, lassen sich bei 100000 Atm. auf wesentlich erhöhte Dichte bringen. Man hat Grund zu denken, daß im Inneren der großen Himmelskörper eine Neubildung der allerschwersten, nämlich der radioaktiven Atome (mit Atomgewichten über 220 oder auch über 240) aus leichteren Atomen stattfindet; denn wenn diese Atome überall nur dem bekannten Zerfall unterworfen wären (E 555) — ohne Ort der Neubildung oder doch etwa einer Zerfallsverhinderung —, so wäre nicht befriedigend einzusehen, wie überhaupt noch etwas von ihnen vorhanden sein sollte.

Jedenfalls ist dem hohen Drucke der großenteils feste Zustand der Erde (vgl. 224 u. A 17) trotz unzweifelhaft hoher Temperatur des Inneren zuzuschreiben (W 200). Auch erklärt der schon in den zugänglichen Tiefen der Erdrinde ziemlich hohe und allseitige Druck die Festigkeit der Sedimentärgesteine und die bruchlosen Verbiegungen ihrer Schichten (vgl. 299).

306. Hohlverbundene Räume (kommunizierende Röhren). — Sind beliebig geformte, auch verzweigte, jedoch zusammenhängende Räume von einer ruhenden Flüssigkeit einheitlichen spezifischen Gewichtes erfüllt, so muß nach 301 unter dem Einfluß der Schwere in allen Flüssigkeitsteilen einer und derselben Horizontalschicht der gleiche Druck herrschen, auch wenn sie — wie z. B. in einem U-Rohr — durch Wände voneinander getrennt sind. Denn wäre der Druck verschieden, so würden nach Gl. 301 unterhalb oder oberhalb — wo die getrennten Flüssigkeitsteile aneinander grenzen — ungleiche Drucke zusammenkommen, und es wäre also noch nicht Ruhe.

Hat die Flüssigkeit in solchem Raume verschiedene voneinander getrennte Oberflächenstellen, so folgt im besonderen, daß diese alle derselben Horizontal-

[1]) In astronomischen Werken zu findende Dichtenangaben von z. B. 10^5 gr/cm³ beruhen auf fragwürdigen Annahmen (vgl. Fußnote zu W 189).

ebene angehören müssen, wenn sie gleichen Druck haben, wie es beim Angrenzen an die freie Luft gewöhnlich der Fall ist. Druckunterschiede an den Oberflächen können allerdings durch die besonderen Oberflächenkräfte der Flüssigkeiten selbst auftreten, und dann müssen die verschiedenen Oberflächenstellen entsprechend verschieden hoch stehen (339).

Im Flüssigkeitsinneren treten solche Kräfte nicht auf. Geht man daher von irgendeinem Punkt des Inneren aus, an welchem der Druck bekannt sei, so findet man auf beliebigen, jedoch ununterbrochen durch die Flüssigkeit führenden Wegen überall die Drucke richtig, wenn man nur die durchlaufenen Höhenunterschiede nach Maßgabe der Gl. 301 berücksichtigt.

Dies gilt auch beim Vorhandensein von Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichts. Daraus folgt auch, daß beispielsweise im U-Rohr Abb. **72** Quecksilber (Q) und Wasser (W) Säulenhöhen ergeben müssen, die im umgekehrten Verhältnis der spezifischen Gewichte stehen müssen, $H : h = 13{\cdot}6 : 1$ (Tab. 2); es drücken dann diese beiden Säulen gleichviel, und das Quecksilber unterhalb a b, worauf sie drücken, hält sich selber im Gleichgewicht. Man kann so, wenn man will, spezifische Gewichte mittels Längenmaßes vergleichen.

307. Auftrieb; Satz von Archimedes. — Es befinde sich ein fester Körper unter einer Flüssigkeit, rings von derselben umgeben (Abb. 73), und das Ganze sei der Schwerkraft unterworfen. Wir nehmen den Körper prismatisch oder zylindrisch an, mit der Grundfläche f und der Höhe h; die Flüssigkeitsoberfläche sei bei o. Vermöge des nach Gl. 301 zu berechnenden Schweredrucks der Flüssigkeit wirken an jedem Oberflächenelement des festen Körpers Normalkräfte, die mit zunehmender Tiefe unter o dieser proportional steigen. Die Kräfte an den Seitenflächen geben, als entgegengesetzt gleich, paarweise die Resultierende Null am festen Körper (94); es bleibt aber von den auf die obere und untere Grundfläche wirkenden Kräften eine Resultierende übrig, gleich deren Differenz. Die obere Kraft ist $h_1 \cdot s \cdot f$, die größere untere $h_2 \cdot s \cdot f$; ihre Differenz $(h_2 - h_1)\, sf = hsf = A$ bedeutet eine an dem festen Körper angreifende, senkrecht nach aufwärts gerichtete Kraft. Sie wird „Auftrieb" genannt. Da $h \cdot f = v$ das Volum des festen Körpers ist, gilt für den Auftrieb

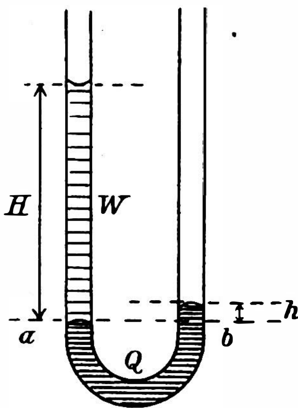


Abb. 72. Zwei Flüssigkeitssäulen im Gleichgewicht.

$$A = v \cdot s. \qquad 307)$$

Es tritt hier das Produkt aus dem Volum des festen Körpers und dem spezifischen Gewicht der Flüssigkeit auf, und dieses Produkt bedeutet das Gewicht einer Flüssigkeitsmenge, die das Volum des festen Körpers hat, oder auch das Gewicht der vom festen Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge. Gl. 307 stellt den schon von Archimedes gefundenen Satz dar: Jeder unter eine Flüssigkeit getauchte Körper erleidet einen Auftrieb gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeit.

Der Satz gilt nicht nur für feste Körper, sondern auch für Flüssigkeitsmengen, die inmitten einer anderen Flüssigkeit sind, und ebenso auch für Gasblasen. Es

bleibt nur bei diesen formveränderlichen Körpern die Frage nach der Form über, welche sie im Gleichgewichtsfalle in der Flüssigkeit unter gegebenen Umständen annehmen würden (vgl. 337).

Die Gültigkeit des Satzes, unabhängig von der bei der Herleitung angenommenen prismatischen Form des Körpers, ist unmittelbar klar; denn man kann jedes beliebig geformte und von beliebigem Stoff erfüllte Volum in vertikale prismatische unendlich schmale Volumelemente zerlegt denken und die gleiche Rechnung für jedes dieser Elemente einzeln durchführen nach Berücksichtigung der Kräfte- bzw. Druckübertragungen zwischen benachbarten Volumelementen, und das Ergebnis ist das gleiche (vgl. auch 311).

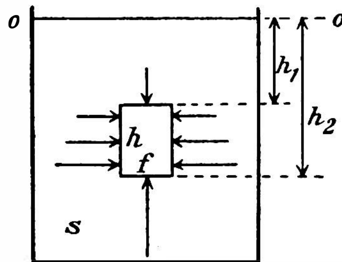


Abb. 73. Auftrieb.

Der Auftrieb kann leicht mittels der Waage gemessen werden, z. B. bei einem Metallstück, das an dünnem Drahte an der Waage hängt, so daß man es auch unter Flüssigkeit getaucht wiegen kann. Der Gewichtsverlust nach dem Untertauchen ist der Auftrieb.

308. Archimedes Satz findet bei Messung von spezifischen Gewichten, als Mittel der dazu nötigen Volummessung, ausgedehnte Anwendung.

Um das spezifische Gewicht eines festen Körpers zu ermitteln bestimmt man sein Gewicht (für den Zähler in Gl. 70) und seinen Auftrieb unter Wasser, was beides mit der Waage sehr fein ausführbar ist. Der Auftrieb in gr gibt — entsprechend der Festsetzung des gr — geradezu das Volum des Körpers in cm³ an, falls das Wasser 4° Temperatur hatte, andernfalls nach kleiner Umrechnung auf 4° mittels einer Tabelle der spezifischen Gewichte des Wassers (Tab. 19 Bd. II)[1]). Verträgt der Körper das Wasser nicht, so nimmt man eine andere Flüssigkeit von bekanntem spez. Gewicht zu Hilfe.

Zur spezifischen Gewichtsbestimmung von Flüssigkeiten mittels Archimedes Satz verwendet man einen Senkkörper (etwa aus Glas), der an dünnem Draht an der Waage hängt. Der auszuwiegende Auftrieb unter der betreffenden Flüssigkeit gibt das Gewicht einer Flüssigkeitsmenge vom Volum des Senkkörpers. Der ebenfalls auszuwiegende Auftrieb unter Wasser gibt das Volum. Quotient beider ist wieder das spezifische Gewicht (Gl. 70).

Auch die Festlegung der Gewichtseinheit, des Gramm, ist mittels Archimedes Satz erfolgt (1795—1800). Ein (hohler) Kupferzylinder wurde außen aufs genaueste ausgemessen (was leichter ausführbar ist als die Ausmessung des Innern eines Gefäßes), um sein Volum berechnen zu können (das etwa 11 Liter betrug), und unter Wasser gewogen. Danach wurde das Normalkilogramm aus Platin hergestellt[2]).

309. Archimedes Satz gibt auch Aufschluß über das Schwimmen der Körper. Es wirkt auf jeden unter Flüssigkeit befindlichen Körper außer dem Auftrieb auch sein eigenes Gewicht, und beide wirken gegeneinander. Sind sie gleich groß, so ist die gesamtresultierende Kraft Null; der Körper schwebt dann in der Flüssigkeit. Überwiegt das Gewicht, so sinkt er unter; überwiegt der Auftrieb, so steigt er an die Oberfläche. Im letzteren Fall tritt Gleichgewicht dadurch ein, daß ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit heraustritt so weit, daß das

[1]) Das Volum des mit-untergetauchten Aufhängedrahtes ist selbstverständlich abzuziehen. Für das Gewicht des Meniskus am Draht siehe 338, für die Umrechnung des Gewichtes des Körpers auf den leeren Raum siehe 354.

[2]) Die damalige Messung war sehr gut gelungen; man hat bei späteren Wiederholungen mit verfeinerten Mitteln keine nennenswerte Abweichung des Platinkilogramms vom Gewichte des dm³ Wasser von 4° gefunden.

Gewicht der dann noch verdrängten Flüssigkeitsmenge gleich wird dem Gewicht des Körpers; er schwimmt dann.

Da beim Volum v und dem spez. Gewicht σ des festen Körpers sein Gewicht $v\sigma$ ist, der Auftrieb in der Flüssigkeit vom spez. Gewicht s aber vs, so kommt es bei der Frage des Schwimmens oder Untersinkens stets auf die Differenz $v(\sigma - s)$ an, und man sieht, das Untersinken erfolgt, wenn das spezifische Gewicht des festen Körpers größer ist als das der Flüssigkeit, Schwimmen, wenn ersteres kleiner ist und Schweben, wenn beide gleich sind.

Der letztere Fall — Gleichheit der spezifischen Gewichte — liegt auch vor, wenn man irgendeinen Raumteil einer einheitlichen Flüssigkeit inmitten seiner gleichartigen Umgebung ins Auge faßt. Jeder solcher Teil schwebt in der Tat in der übrigen Flüssigkeit wie gewichtslos. Sein Gewicht ist durch den nach Archimedes Satz genau ebenso großen Auftrieb aufgehoben. Man kann in dem alltäglich zu beobachtenden inneren Gleichgewicht jeder der Schwere unterworfenen Flüssigkeit den besten, unmittelbaren Erfahrungsnachweis für Archimedes Satz sehen.

Das Schweben, als gutes Kennzeichen für die Gleichheit zweier spezifischer Gewichte, kann zur Ermittelung spezifischer Gewichte fester Körper benutzt werden, von welchen etwa nur kleine Splitter zur Verfügung stehen; man stellt dann irgend ein flüssiges Gemisch her, in welchem die Splitter schweben und bestimmt das spezifische Gewicht der Flüssigkeit mit dem Pyknometer (70) oder dem Senkkörper (308).

310. Die Eintauchtiefe beim Schwimmen ist — wie leicht verständlich — stets durch das Verhältnis der beiden spezifischen Gewichte, fest und flüssig, bestimmt. Ein Holzstück mit dem spez. Gewicht 0·6 schwimmt auf Wasser, wenn 0·6 seines Volums eingetaucht sind; ein Eisenstück schwimmt auf Quecksilber mit Einsenkung von $7{\cdot}8/13{\cdot}6 = 0{\cdot}57$ seines Volums (vgl. Tab. 2).

Ist das spezifische Gewicht des schwimmenden Körpers uneinheitlich, wie z. B. bei einem Schiff, so käme es auf das mittlere spezifische Gewicht an. Einfacher ist es, unmittelbar nach Archimedes Satz zu denken, daß das im Gleichgewicht auf Süßwasser schwimmende Schiff ebensoviel Kubikmeter Außenraum unter seiner Wasserlinie haben muß, als es insgesamt, mit allem was darauf und darin ist, Tonnen wiegt. Kommt das Schiff in Seewasser, so steigt es merklich heraus, da von dieser spezifisch schwereren Flüssigkeit weniger Kubikmeter das gleiche Gewicht ergeben.

„Aräometer" sind Schwimmkörper, meist aus Glas, mit herausragendem Stiel, auf welchem eine Skala verzeichnet ist, die zu jeder Eintauchtiefe das spezifische Gewicht der zugehörigen Flüssigkeit angibt. Sie dienen zur bequemen Ermittelung der spezifischen Gewichte von Flüssigkeiten. Es können auch sonstige Angaben für bestimmte Flüssigkeitsgemische oder Lösungen am Aräometer verzeichnet sein, die vom spezifischen Gewicht abhängen[1]).

Körper mit veränderlichem Volum können ihre Eintauchtiefe beim Schwimmen variieren. Der ohne Bewegung im Wasser befindliche Mensch z. B. schwimmt gut mit Nase und Mund außer Wasser, wenn er vorher durch Lufteinatmung die Brust geweitet und dadurch seine Wasserverdrängung gehörig vergrößert (oder sein mittleres spezifisches Gewicht gehörig vermindert) hat; bei ausgeatmeter Luft sinkt er.

311. Metazentrum. — Archimedes Satz gibt die Größe des Auftriebes. Man kann aber auch nach der Lage dieser senkrecht gerichteten Kraft in einem schwimmenden oder untergetauchten Körper und nach ihrem Angriffspunkt fragen. Erstere Frage wurde auch schon von Archimedes, letztere erst von Stevin gelöst.

Man muß dazu bei der Zusammensetzung der Einzelkräfte, welche von seiten der Flüssigkeit auf die ganze untergetauchte Oberfläche eines festen Körpers ausgeübt werden, verfahren, wie

[1]) Alle Aräometerskalen müssen empirisch hergestellt werden, d. h. nach Proben mit Flüssigkeiten, deren spezifische Gewichte bzw. sonstige Beschaffenheit vorher auf anderem Wege ermittelt sind.

es im Falle der Schwerpunktsermittelung für die im ganzen Volum des Körpers wirksamen Kräfte geschehen ist (106). Diese Einzelkräfte wirken hier alle senkrecht zu den Oberflächenelementen des festen Körpers (295); man zerlegt zunächst jede derselben in eine lotrechte und eine waagrechte Komponente. Die waagrechten Komponenten geben wieder zusammen die resultierende Null, wie es schon oben eingesehen wurde (307 und Abb. 73); die lotrechten sind dann zur gesuchten Resultierenden zusammenzusetzen nach den für die Zusammensetzung paralleler an einem festen Körper angreifenden Kräfte entwickelten Regeln (105).

Es sei dies in allgemein gültiger Weise für den Fall eines Holzklotzes a b c d (Abb. 74) näher betrachtet. Es sei derselbe in beliebiger Schiefe flach auf Wasser gelegt, wobei er mit 0·6 Untertauchung nach Archimedes Satz einen seinem Gewichte gleichen Auftrieb geben muß (310). Man denke den untergetauchten Teil des Klotzes in lotrecht stehende prismatische Raumelemente vom waagrechten Querschnitt f zerlegt, deren eines in der Abbildung schraffiert ist. Die auf die Außenfläche von seiten der Flüssigkeit entfallende Kraft k hat (nach Gl. 301) die Größe $h \cdot s \cdot f/\cos \alpha$, wenn α der Neigungswinkel der Außenfläche zur Horizontalen ist. Die lotrechte Komponente l dieser Kraft ist aber $h \cdot s \cdot f$, was gleich ist dem Gewicht des schraffierten Raumelementes voll Flüssigkeit. Da dies für jedes andere Raumelement des untergetauchten Teils auch gilt, folgt daraus der Satz von Archimedes, was wir schon in einfacherer Weise überlegt hatten (307). Es kann aber jetzt leicht auch die Lage der resultierenden Auftriebskraft im Körper in allgemein gültiger Weise gefunden werden. Die zum schraffierten Raumelement gehörige Auftriebskraft $l = hsf$ greift am unteren Ende des Raumelements an; es kann aber ihr Angriffspunkt nach einem für feste Körper geltenden Satze (94) beliebig in ihrer Richtung, d. i. lotrecht verschoben werden, ohne die Wirkung zu ändern. Verlegt man den Angriffspunkt in den Mittelpunkt des Raumelementes und verfährt man ebenso bei allen übrigen Raumelementen, so ist leicht die Lage der Resultierenden aller der Einzel-Auftriebskräfte anzugeben; sie wird durch den Schwerpunkt des verdrängten Flüssigkeitsteiles gehen. Denn die Zusammensetzung all der parallelen, auf die einzelnen Raumelemente des festen Körpers wirkenden Auftriebskräfte erfolgt nach denselben Regeln, die für die Schwerpunktsbestimmung gelten (106), und die Einzelkräfte sind die Gewichte der Raumelemente der verdrängten Flüssigkeit.

Es sei S_1 in Abb. 74 dieser Flüssigkeits-Schwerpunkt. Die Auftriebskraft A kann dann in S_1 oder einem beliebigen anderen Punkte der Vertikalen durch S_1 angreifend angenommen

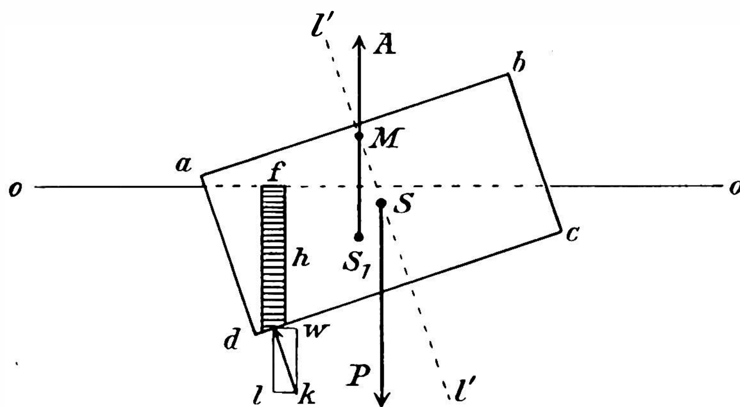


Abb. 74. Metazentrum.

werden, während das an Größe A gleiche Gewicht P des Körpers in dessen Schwerpunkt S angreift. Man sieht, daß trotz Gleichheit der beiden Kräfte noch kein Gleichgewicht herrscht, sondern daß ein Drehmoment übrig bleibt, dessen Größe durch A oder P und dem waagrechten Abstand der beiden Kräfte gegeben ist und das den schwimmenden Körper in eine andere Lage wenden wird.

Es ist hierbei die Frage übrig, ob der Flüssigkeits-Schwerpunkt S_1 für alle Lagen des schwimmenden Körpers derselbe bleibt, so wie es für den Schwerpunkt S des Körpers selbst zutrifft (106). Die Antwort muß verneinend sein; denn es ändert sich bei jeder Wendung des Körpers

die Form des verdrängten Flüssigkeitsteiles, wenn auch sein Gewicht gleich bleibt. Ermittelt man aber für eine Anzahl von Lagen die Schwerpunkte S_1 und zieht jedesmal die Lotlinie durch, so gibt der gemeinsame Schnittpunkt aller dieser Lotlinien einen für alle diese Lagen gültigen Angriffspunkt der Auftriebskraft. Dieser Angriffspunkt wird das Metazentrum genannt.

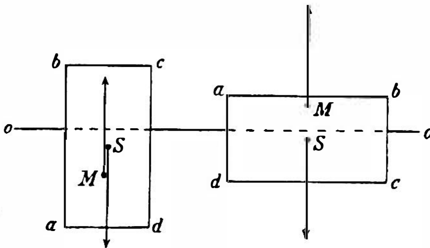


Abb. 74 a. Labiles Schwimmen. Abb. 74 b. Stabiles Schwimmen.

Man sieht in Abb. 74, daß M als Metazentrum sich ergibt, da auch l′ l′ eine dieser Lotlinien (geltend für die symmetrische Lage mit der Kante a b waagrecht) sein muß. Vorausgesetzt ist dabei, daß auch alle anderen durch die Flüssigkeitsschwerpunkte gezogenen Lotlinien in M einander schneiden. Man findet, daß dies bei beliebiger Körperform nicht zutrifft, sobald zu sehr verschiedene Schwimmlagen in Betracht gezogen werden. Man kann daher im allgemeinen nur für je eine Gruppe benachbarter Schwimmlagen das Metazentrum angeben; ein gegebener fester Körper auf gegebener Flüssigkeit hat im allgemeinen mehrere Metazentren, während er nur einen einzigen, für alle seine Lagen gültigen Schwerpunkt hat. Beispielsweise ist in Abb. 74a das Metazentrum des vorbetrachteten Holzklotzes für seine hochgestellte Lage angegeben. Man sieht, daß er in dieser Lage nicht stabil schwimmen kann; sein Gleichgewicht ist labil; er wird bei geringster Störung in die Lage Abb. 74b umstürzen müssen, wobei das Metazentrum an die andere, vorher bestimmte Stelle wandert, wodurch das Gleichgewicht stabil wird, wie aus den Kräften zu sehen ist.

Man sieht auch, daß das Schwimmen immer dann stabil sein wird, wenn das Metazentrum über dem Schwerpunkt liegt, und umso stabiler je höher es darüber liegt, labil aber, wenn es unter den Schwerpunkt zu liegen kommt. Daß all dies für den Schiffbau wichtig ist, versteht sich; bei der Wahl der Form des untergetauchten Teiles eines Schiffes muß auch das Metazentrum bedacht sein.

Volumelastizität der Flüssigkeiten.

312. Kompressibilität. — Alles Bisherige über die Flüssigkeiten folgte aus deren Mangel an Formelastizität, zusammen mit dem Bestehen von Volumelastizität. Nun kommt es darauf an, die Letztere quantitativ zu fassen. Dies geschieht durch die Kompressibilität, welche für alle Aggregatzustände definiert wird wie bei den festen Körpern (267): als die Volumänderung der Volumeinheit durch die Druckerhöhung Eins. Man sieht, daß die Größe der Volumelastizität durch das Reziproke der so definierten Kompressibilität gemessen ist.

313. Piezometer. — Die Kompressibilität von Flüssigkeiten muß unmittelbar durch Beobachtung ermittelt werden; die bei festen Körpern mögliche Berechnung aus anderen elastischen Konstanten (Gl. 267) fällt weg, da die Flüssigkeit eben nur diese eine elastische Konstante — die Kompressibilität — besitzt (vgl. 262, 272).

Zur Beobachtung muß die Flüssigkeit in einem auf Volum geeichten Gefäß erhöhtem Druck ausgesetzt werden. Dabei ist es nötig, Volumänderung des Gefäßes möglichst auszuschalten. Dies geschah zuerst in Örsteds Piezometer (Abb. 75) durch Herstellung gleichen Drucks außen wie innen an dem die Flüssigkeit enthaltenden Gefäße G, indem man dasselbe unter eine beliebige Flüssigkeit F (z. B. Wasser) setzt und den Druck auf diese ausübt. Beide Flüssigkeiten sind durch Quecksilber getrennt, welches in der Schale Q sich befindet und

mit seinem in den Rohrfortsatz R des Gefäßes G hineinragenden Faden eine Marke für das Volum der Flüssigkeit in G abgibt. Zu jedem Druck, unter welchen man das Ganze mittels des (schematisch angedeuteten) Stempels S setzt, gehört ein in dieser Weise ausmeßbares Volum der Flüssigkeit, wonach deren Kompressibilität definitionsgemäß berechenbar ist. Die Gleichheit der von außen ausgeübten Zusatzdrucke außen und innen am Gefäß G ist durch den dafür geltenden Satz (298) gewährleistet, und hierdurch ist die bei einseitigem Druck leicht sehr große Volumänderung des Gefäßes vermieden.

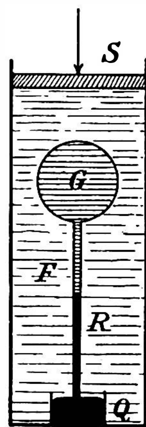


Abb. 75. Piezometer.

Eine kleine Volumänderung des Gefäßes bleibt aber doch über, weil dessen Wand dem allseitigen Druck unterworfen ist, was nicht ohne Einfluß auf seinen Hohlraum ist. Es ändert sich in solchem Falle der Hohlraum bei Druckänderung in demselben Maße als wäre er mit dem Stoff der Wand erfüllt und der Druckänderung unterworfen. Man sieht daraus, daß man mit dem Piezometer nur die Differenz der Kompressibilitäten von Flüssigkeit und Gefäßstoff mißt. Man kann aber den Gefäßeinfluß ganz eliminieren, wenn man Messungen bei ungleichem Außen- und Innendruck hinzunimmt.

314. In dieser Weise sind die in Tab. 8 verzeichneten Kompressibilitäten verschiedener Flüssigkeiten gemessen.

Die Zahlen zeigen vor allem, daß Flüssigkeiten im allgemeinen kompressibler sind als feste Körper (vgl. den unteren Teil der Tab. 8). Dies bedeutet, daß im flüssigen Zustand mehr freier Raum zwischen den Molekülen (Atomen) ist als im festen; denn es kann bei Kompression nur dieser freie Raum verkleinert werden, nicht der den Molekülen (Atomen) selbst eigene Raum, welchen sie vermöge ihrer erfahrungsmäßigen gegenseitigen Undurchdringlichkeit bei allen dem Versuch zugänglichen und selbst auch höheren Drucken bewahren (299, 305).

Alles was die molekularen Zwischenräume vergrößert, vergrößert auch die Kompressibilität. So steigt dieselbe bei fast allen Flüssigkeiten mit steigender Temperatur (siehe Alkohol in der Tabelle) entsprechend der Wärmeausdehnung, und die Kompressibilität zeigt sich auch beim Vergleich verschiedener Flüssigkeiten untereinander um so größer, je näher man dem Siedepunkt der betreffenden Flüssigkeit ist (vgl. Quecksilber, Alkohol, Äther), bei welchem de Moleküle die dem Dampfzustand entsprechenden sehr vergrößerten Zwischenräume annehmen. Im Gaszustand ist die Kompressibilität aller Stoffe außerordentlich vergrößert (362).

Wasser bildet in der Temperaturabhängigkeit eine Ausnahme. Der Grund hiervon kann die Änderung der Molekulargröße bei steigender Temperatur sein (allmählicher Zerfall von $H_{2n}O_n$ zu H_2O), was auch noch durch andere, in der Wärmelehre zu betrachtende Besonderheiten des Wassers angezeigt ist (W 23, 56, 85).

Ist eine Flüssigkeit bereits unter sehr hohem Druck, so sind die molekularen Zwischenräume schon sehr verkleinert, und daher zeigt sie dann verringerte Kompressibilität. Man sieht dies an der Zahl für Wasser bei 10000 Atm.; alle übrigen Zahlen der Tabelle beziehen sich auf Anfangsdrucke nahe 1 Atm.

Die Kleinheit aller dieser Zahlen (Tab. 8) zeigt, daß die Kompressibilität bei den Flüssigkeiten, obgleich größer als bei festen Körpern, doch für gewöhnlich ganz außer acht gelassen werden kann, wie wir auch in allem Vorhergehenden (z. B. auch bei der hydraulischen Presse) keine Volumänderungen als Folge der dort betrachteten Drucke in den Flüssigkeiten in Betracht zogen. Bringt man 1 l Wasser unter 1 Atm. Überdruck, so schrumpft es nur um rund 0·05 cm³. Man kann in vielen Fällen zutreffend Flüssigkeiten wie feste Körper — im Gegensatz zu den Gasen — als „*inkompressibel*" behandeln, d. h. ihnen unendlich große Volumelastizität zuschreiben.

Oberflächenspannung.

315. *Molekularkräfte bei Flüssigkeiten.* — Im bisher Betrachteten wurden die Molekularkräfte bei den Flüssigkeiten nur in Gestalt der Abstoßung merklich, welche durch die geringe Kompressibilität und deren Abnahme bei hohen Drucken angezeigt ist. Diese Abstoßung entspricht der gegenseitigen Undurchdringlichkeit der Moleküle und sie wird bei allen drei Aggregatzuständen wirksam, sobald die Moleküle einander zu nahe kommen.

Es bleibt die Frage übrig, ob bei den Flüssigkeiten nicht auch *anziehende Kräfte* merklich werden, die nach den Eigenschaften des festen Aggregatzustandes zu erwarten sind (248, 249). Die Antwort fällt bejahend aus; doch äußern sich die anziehenden Kräfte der Moleküle bei den Flüssigkeiten in ganz anderer Weise als bei den festen Körpern. Es tritt infolge der Beweglichkeit der Moleküle bei den Flüssigkeiten eine Reihe besonderer Erscheinungen ein, die wir in diesem Abschnitt betrachten. Sie werden alle aus der einen Vorstellung verständlich, zugleich auch quantitativ vollständig verfolgbar (340): *daß jede Flüssigkeitsoberfläche wie eine gespannte Haut sich verhält.*

316. *Der Unterschied in der Wirkung der anziehenden Molekularkräfte bei flüssigen und bei festen Körpern* kann nicht allein dem vergrößerten Molekülabstand zugeschrieben werden; denn dieser ist bei den beiden Zuständen nicht so sehr verschieden (314, W 199), und besonders befinden sich die Moleküle der Flüssigkeiten, wie die der festen Körper, stets weit innerhalb ihrer gegenseitigen Wirkungskugeln (248). Es ist vielmehr anzunehmen, daß die Wärmebewegung den Hauptunterschied macht. Dieselbe ist im flüssigen Zustand stets lebhafter als bei gleicher Molekülart im festen; denn ersterer Zustand tritt stets bei höherer Temperatur auf als letzterer. Die lebhaftere Wärmebewegung bedingt nicht nur die etwas größeren Molekülabstände der flüssigen Körper, sondern sie verhindert offenbar das dauernde Zustandekommen derjenigen besonderen gegenseitigen Lagerungen der Moleküle (Atome), welche dem festen Zustand eigen sind und die auch zur Kristallbildung führen (249)[1]. In einem festen Körper ist jedes Molekül (Atom) dauernd durch große Kräfte der Nachbarmoleküle an eine feste Gleichgewichtslage gebunden (256), um die es schwingend die Wärmebewegung ausführt, ohne je weit davon sich zu ent-

[1]) Zeitweilig können auch bei Flüssigkeiten solche geordnete Zusammenlagerungen von Molekülgruppen in wechselnder Lage und Größe vorkommen. Man bemerkt dies an Erscheinungen im polarisierten Licht, allerdings meist nur unter dem Mikroskop, weil die betreffenden Molekülgruppen klein sind. Man nennt solche Flüssigkeiten „*flüssige Kristalle*". In kleinsten, fortwährend wechselnden Molekülgruppen mögen alle Flüssigkeiten so beschaffen sein.

fernen[1]): daher hat der feste Körper auch seine Formelastizität. In einer Flüssigkeit dagegen fehlen solche überwiegende und dauernde Kräfte von seiten allernächster Nachbarmoleküle (Atome); es sind nur die allseitig mehr oder weniger gleichmäßig verteilten anziehenden o er abstoßenden Kräfte aller Moleküle vorhanden, die überhaupt innerhalb der Wirkungskugel des betrachteten Moleküls liegen, wie dies Abb. 76 für ein Molekül m_1 genügend weit unter der Flüssigkeitsoberfläche o o andeutungsweise darstellt. Diese Kräfte schwanken dauernd nach Größe und Richtung wegen der Wärmebewegung; im Mittel über nicht zu kurze Zeiten haben sie daher keine einseitige Wirkung, so daß das Molekül durchschnittlich wie kräftefrei zwischen den anderen Molekülen sich bewegen kann. Daß dem so ist, zeigt jede Flüssigkeit durch die später zu betrachtende Erscheinung der Diffusion (365), welche ein stetes Wandern der der Wärmebewegung unterworfenen Moleküle im Innern der Flüssigkeit erkennen läßt[2]).

317. Besondere Kräfte an der Oberfläche. — Anders ist es aber in der Nähe der Oberfläche einer Flüssigkeit (s. Abb. 76). Hier ist die Wirkungskugel des betrachteten Moleküls m_2 oder m_3 nur in ihrem unteren Teile von anderen Molekülen der Flüssigkeit erfüllt; oberhalb der Oberfläche o o fehlen solche. Daher muß eine einseitig und zwar senkrecht zu o o gerichtete Resultierende K der Molekularkräfte sich ergeben. Sie ist nach dem Inneren der Flüssigkeit gerichtet, weil an der Oberfläche jedenfalls die anziehenden Kräfte der Moleküle überwiegen müssen; denn würden wegen zu großer Molekülnähe die abstoßenden Kräfte überwiegen (249), so entstünden eben dadurch vergrößerte Molekülabstände, was dann doch die anziehenden Kräfte zur Folge hätte.

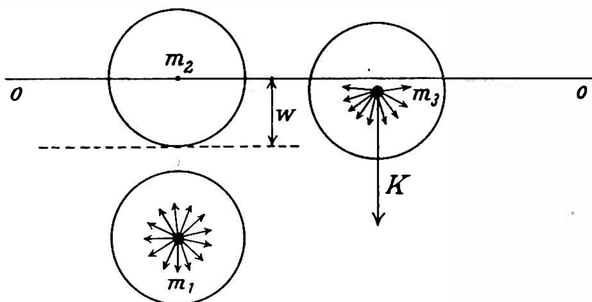


Abb. 76. Molekularkräfte in Flüssigkeiten.

Die zur freien Flüssigkeitsoberfläche senkrecht stehende, nach innen gerichtete Resultierende K (Abb. 76) der Molekularkräfte ist es, die Aufschluß gibt über die Besonderheiten, welche dem flüssigen Zustand über die Unbestimmtheit der Form hinaus eigen sind.

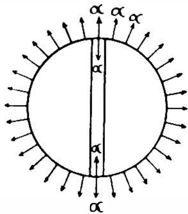
Diese Kraft, welche alle Moleküle der Oberfläche ständig nach innen zieht, hat bei 'der ungehinderten Beweglichkeit der Flüssigkeitsmoleküle eine Abwanderung der Moleküle aus der Oberfläche ins Innere und dadurch eine Verkleinerung der Oberfläche zur Folge, solange nicht eine entgegengerichtete Kraft Gleichgewicht schafft. Es hat daher jede Flüssigkeitsober-

[1]) Dies gilt für die spröden festen Körper; über die zähen vgl. die folgende Fußnote.

[2]) Bemerkenswert ist, daß Diffusion auch in zähen festen Körpern merklich wird, wenn auch in sehr geringem Maße. Gold und Blei z. B., aneinandergrenzend, diffundieren ein wenig in einander hinein, so daß nach genügend langer Zeit das Blei goldhaltig und das Gold bleihaltig wird. Es zeigt dies, daß in diesen Körpern zeitweilig, wenn auch nur in seltenen Augenblicken, die Kräfte der Formelastizität unter dem Einfluß der Wärmebewegung versagen (vgl. 273).

fläche das Streben, möglichst klein zu werden, oder: sie verhält sich wie eine gespannte Haut.

318. Oberflächenspannung. — Um diese Vorstellung der gespannten Oberfläche, die als vollkommen zutreffend sich erwiesen hat (340), quantitativ verwerten und damit vor allem auch prüfen zu können, ist es notwendig, ein Maß für die Spannung einer Fläche zu haben. Wenn man eine Haut, wie etwa das Fell einer Trommel, mit bestimmter Spannung versehen will, so muß man an jeder Längeneinheit ihres Umfanges eine bestimmte, nach außen gerichtete Kraft α anbringen (vgl. Abb. 77). Ist Gleichgewicht, so sucht sich die Haut mit der gleichen Kraft α senkrecht angreifend an jeder Längeneinheit ihrer Umgrenzung zusammenzuziehen, und diese auf die Längeneinheit bezogene Kraft α ist das geeignete Maß für die Spannung einer Fläche.


Abb. 77. Oberflächenspannung.

Man nennt die so aufgefaßte Spannung einer Flüssigkeitsoberfläche kurz die „Oberflächenspannung der betreffenden Flüssigkeit“. Man kann auch sagen, was dasselbe ist: die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit wird gemessen durch die Kraft, mit welcher ein Streifen der Oberfläche von der Breite Eins (vgl. die Abb. 77) sich zu verkürzen strebt. Als Krafteinheit wird hierbei gewöhnlich das mgr, als Längeneinheit das mm genommen, wonach mgr/mm die Einheit der Oberflächenspannung ist.

Der Unterschied zwischen der Oberflächenspannung einer Flüssigkeit und der Spannung eines Trommelfelles ist nur dieser, daß erstere Spannung durch die Natur der Flüssigkeit vorgegeben ist, während letztere, als elastische Kraft, verschiedene (jeweils der eingetretenen Dehnung proportionale) Größen annehmen kann (vgl. 322).

319. Tropfen. — Die Oberflächenspannung ist es, die jeder Flüssigkeit bei allem Mangel an Formelastizität doch ein eigenes Formstreben verleiht; die Flüssigkeit strebt nicht — wie der feste Körper — Formen beizubehalten, die ihr durch äußere Kräfte beigebracht sind, wie wenn die Schwere sie in ein Gefäß preßt, sondern sie strebt durch ihre inneren, molekularen Kräfte sich selbst zu formen und zwar so, daß ihre Oberfläche möglichst klein wird. Man merkt dies an jedem Tropfen, der frei herabfallend der Schwerkraft entzogen ist, insofern als seine Teile während der Fallzeit nicht aufeinander lasten (138). Er nimmt, somit der Oberflächenspannung allein überlassen, Kugelgestalt an, d. i. die Gestalt, die dem gegebenen Volum die kleinste Oberfläche gibt.

Die Tropfenbildung ist, wie jede andere Wirkung der Oberflächenspannung, besonders charakteristisch für den flüssigen Zustand; sie fehlt dem festen wie dem gasförmigen Zustand, und man spricht daher wohl auch besonders von „tropfbaren“ Flüssigkeiten, um sie von den ebenfalls nicht formelastischen Gasen zu unterscheiden.

320. Innerer Druck. — Das Verhalten der Flüssigkeitsoberfläche gleich einer gespannten Haut ist nicht die einzige Wirkung der anziehenden Molekularkräfte der Flüssigkeit. Diese Kräfte sind auch im ganzen Inneren der Flüssigkeit dauernd wirksam, wenn auch dort in stets wechselnder Richtung und Größe

(316). Jedes Molekül des Inneren wird dauernd in irgendeiner Richtung an irgendwelche Nachbarmoleküle gezogen, und dies hat dieselbe Wirkung wie ein allseitig in der Flüssigkeit verbreiteter, das Flüssigkeitsvolum zusammenhaltender Druck. Dieser Druck wird „innerer Druck" oder „Normaldruck" genannt. Auf die Formung der Flüssigkeit hat er keinen Einfluß. Wir betrachten ihn und seinen Zusammenhang mit der Oberflächenspannung später (341, 342) und wenden uns jetzt ganz zur weiteren Untersuchung des formgebenden Einflusses der Oberflächenspannung.

321. Tropfenbildung an engem Rohr. — Auch beim Abfall eines Tropfens von einem festen Körper, z. B. einem vertikalen Rohre, aus welchem Flüssigkeit austritt, zeigt sich die Wirkung der Oberflächenspannung. Die Flüssigkeit hängt vor dem Abtropfen in dem wie elastisch gespannten Säckchen ihrer eigenen Oberfläche, welche auch über den ganzen festen Körper sich erstreckt, wenn er gut benetzt ist. Der Tropfen wächst dann beim Zuströmen von Flüssigkeit so lange, bis sein Gewicht nicht mehr durch die Oberflächenspannung getragen werden kann. Abb. 78 zeigt das Abtropfen von Wasser aus einem gut benetzten Rohre von etwa 0·3 mm Durchmesser in 15facher Vergrößerung. Der bereits zu voller Größe angewachsene Tropfen gleitet bei weiterem Zufluß am Rohre hinab, um ohne weitere Änderung seiner in der Abb. 78 gezeichneten Form dann von dessen Mündung abzufallen. Da die ihn tragende Oberfläche am äußeren Rohrumfang $2r\pi$ sich festhält, an jedem mm derselben mit der Kraft a, so muß für das Gewicht P des abfallenden Tropfens gelten

$$P = 2r\pi a, \qquad 321)$$

wenn man davon absieht, daß stets auch der Druck eines Teiles der im Rohre befindlichen Flüssigkeit von der Oberflächenspannung mit getragen wird. Letzteres bedingt, daß der abfallende Tropfen etwas leichter wird als Gl. 321 angibt, was umso mehr ausmacht, je weiter das Rohr ist[1]).

Sieht man bei engen Röhren hiervon ab, so hat man in der Gl. 321 bereits die Möglichkeit, Oberflächenspannungen in sehr einfacher Weise angenähert zu messen, indem P und 2r gemessen werden. In dieser Weise sind die Zahlen für geschmolzene Metalle in Tab. 10 erhalten, wobei die Tropfen von sehr dünnen Drähten der Metalle abfielen, die in einer Flamme zum Schmelzen gebracht wurden. Es sind dies die größten bekannten Oberflächenspannungen.

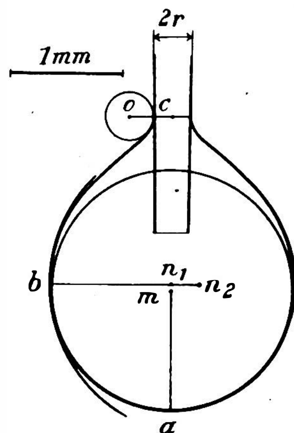


Abb. 78. Hängender Wassertropfen im Gleichgewicht.

322. Tropfenbildung an weiten Röhren. — Wenn Tropfen von weiten Röhren abfallen, ist der Vorgang verwickelter. Es erfolgt hier die letzte Abschnürung durch die sich verkleinernde, gespannte Oberfläche nicht mehr dicht an der Rohrmündung, sondern viel weiter unten, so daß Gl. 321 gar nicht mehr gelten kann. Der zuletzt sehr schnell ablaufende Vorgang ist für den Augenblick der eben fertigen Abschnürung in Abb. 80a durch Funkenbeleuchtung festgehalten (erstes Bild).

[1]) Die Grundlage der Berechnung hierzu findet sich unter 326.

Tab. 10. **Oberflächenspannungen.**

Wasser 0°C	7·71 mgr/mm
„ 20°C	7·40 „
„ 50°C	6·91 „
„ 100°C	5·99 „
Alkohol (C_2H_6O) 20° C	2·32 „
Äthyläther 20° C	1·7 „
Olivenöl 20° C	3·3 „
Seifenlösung 20° C	3·0 „
Quecksilber 20° C	44·4 „
Zinn } bei Schmelztemperatur	60 „
Blei } bei Schmelztemperatur	46 „
Silber } bei Schmelztemperatur	41 „

Entsprechend der stets geringen Größe der Oberflächenspannung können Tropfen auch von sehr weiten Röhren niemals sehr groß werden. Abb. 79 zeigt, wie man durch Hinzunahme einer gespannten festen Kautschukhaut die Erscheinung der Tropfenbildung bei künstlich außerordentlich vergrößerter Oberflächenspannung ablaufen lassen kann. Es fließt Wasser in den an Fäden hängenden fast 1 m weiten, unten die Kautschukhaut tragenden Metallring r r. Die punktierte Linie zeigt eine Anfangsform, die ausgezogene die Endform der in der Haut hängenden Wassermasse. Das wesentliche ist, daß man hier dieselben Formen in starker Vergrößerung erhält, die beim Tropfenabfall von weiten Röhren bei Flüssigkeiten bekannt sind, mit Einschluß der Einschnürung, auf welche dann sogleich der schnell verlaufende Abfall folgt.

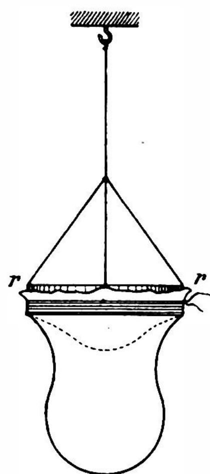


Abb. 79. Tropfenbildung.

Man sieht daraus, was auch Rechnung zeigt (326), daß die Formen hängender Tropfen ganz dem Getragensein der Flüssigkeit in einer gespannten Haut entsprechen. Der immerhin vorhandene Unterschied bei Anwendung der Kautschukhaut besteht darin (318), daß die Spannung der Kautschukhaut mit zunehmender Dehnung derselben zunimmt, wie es dem festen Körper entspricht, daß dagegen die Oberflächenspannung einer Flüssigkeit von Veränderungen der Oberflächengröße unberührt bleibt, weil durch Ein- bzw. Austritte von Molekülen stets der gleiche Molekülabstand in der Oberfläche aufrechterhalten bleibt. Dies kann die Kautschukhaut nicht leisten, und deshalb kann sie auch den Endvorgang des Abfallens des Tropfens nicht bieten.

323. Schwingende Tropfen. — Wenn ein Tropfen abfällt, hat er die in Abb. 78 und auch 80a ersichtliche, in senkrechter Richtung langgezogene Form, und außerdem hat er innere Bewegungen, was alles Folge der Schwere und der Abschnürung durch die nach Verkleinerung strebende Oberfläche ist. Die kleinste Oberfläche würde der abfallende Tropfen bei Kugelform haben; gegen diese Form wird er daher auch getrieben während er fällt. Die Trägheit seiner bewegten Teile führt jedoch über dies Ziel

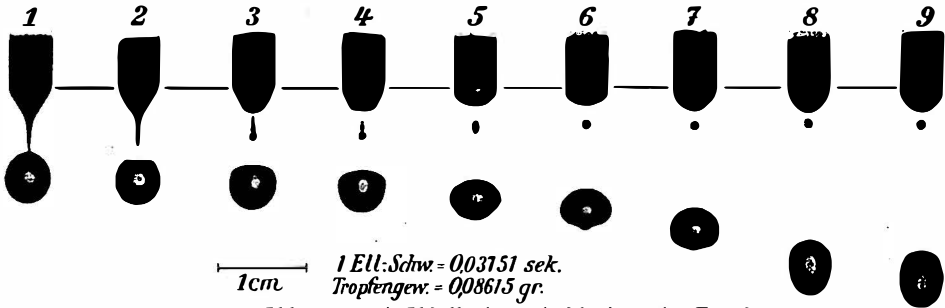


Abb. 80 a, b. Abfallende und schwingende Tropfen. (Die horizontale Linie zeigt die Rohrmündung an).














Abb. 80 b.

hinaus, so daß er bald eine in senkrechter Richtung abgeplattete Form annimmt, worauf dann wieder die Oberflächenspannung ihn zur Kugelform hintreibt, die Trägheit wieder darüber hinaus in die langgestreckte Form, und so in Wiederholung weiter. Die Abb. 80a und b zeigen diese während des Fallens vor sich gehenden Formänderungen[1]). Es sind hier die für regelmäßige Schwingungen erforderlichen Bedingungen gegeben, wie bei einem Pendel: das Zusammenwirken einer geeigneten Kraft mit der Trägheit (163). Man kann die Schwingungsdauer T der Tropfen auch berechnen; sie ist die Zeit von einem Bewegungszustand bis zum nächsten gleichen, etwa von einer flachen ellipsoidischen Form bis zur nächsten, $T = \sqrt{\frac{3}{8}\pi P/g\alpha}$. Man sieht, daß, wie stets bei Schwingungen (vgl. Gl. 167a), im Zähler unter der Wurzel die Masse, hier des Tropfens, P/g, im Nenner die treibende Kraft, hier die Oberflächenspannung α steht.

Fällt eine Reihe von Tropfen von dem Rohre hintereinander ab, so erkennt man bei geeigneter Beleuchtung die Örter der abgeflachten Tropfenformen durch ihre hellen Lichtreflexe, und man kann aus den Höhenlagen dieser Örter mit der vorhandenen Kenntnis der Fallbewegung die Schwingungsdauer T ermitteln, was zusammen mit dem Tropfengewicht P eine Berechnung der Oberflächenspannung α ermöglicht, wobei man sie ebenso groß findet wie auf allen anderen Wegen. Man ist dadurch überzeugt, daß auch diese Erscheinung der Tropfenschwingungen aus der Kenntnis der Oberflächenspannung richtig verständlich ist.

Am ungestörtesten hat man diese Schwingungen der Tropfen in einiger Tiefe unter der Abfallstelle (vgl. Abb. 80b, die den Verlauf von der 9. bis zur 10. Schwingung umfaßt), wo die vom Abfallen herrührenden verwickelteren, schnelleren, über die Hauptschwingung gelagerten Bewegungen im Tropfen durch innere Reibung (400 u. f.) schon abgedämpft sind. Die Formen der Tropfen sind hier sehr nahezu ellipsoidisch.

324. Zerfallen von Flüssigkeitsstrahlen. — Solche Schwingungen findet man auch bei den Tropfen, in welche Flüssigkeitsstrahlen zerfallen. Auch dieses Zerfallen selbst ist Wirkung der Oberflächenspannung; denn ein langer Zylinder erhält bei gleichbleibendem Inhalt eine kleinere Oberfläche, wenn er in Kugeln zerfällt.

[1]) Der Maßstab ist beigesetzt.

Man sieht solches Zerfallen im Beginn auch in den Bildern 2, 3 und 4 der Abb. 80a bei dem Flüssigkeitszylinder, der den Tropfen vor dem Abfall zuletzt noch mit dem Rest der Flüssigkeit am Rohr verbindet. Es entsteht aber hier, wie die weiteren Bilder zeigen, schließlich doch nur ein einziger kugelförmiger kleiner Nebentropfen aus dem Zylinder, weil sein Inhalt, als starke Ausstülpung des am Rohr befindlichen Flüssigkeitsrestes (Abb. 80a Bild 2), durch die Oberflächenspannung nach oben geworfen wird. Man sieht die Bewegung nach oben in den Bildern 3—8 an dem entstandenen kleinen Nebentropfen noch andauern; erst vom Bild 8 an fällt dieser Nebentropfen dem Haupttropfen nach.

325. Seifenblasen. — In besonders einfacher Weise zeigt sich die Oberflächenspannung an den sehr dauerhaften Häuten und Blasen, die Seifenlösung bildet. Man hat an einer Seifenblase fast nur Oberfläche und kaum Flüssigkeitsvolum; daher tritt hier die Kraft der Schwere ganz zurück und es bleibt die der Oberflächenspannung fast allein wirksam. Daher die Kugelform der Seifenblasen, auch wenn sie noch am Blasrohr hängen, wieder als Form kleinster Oberfläche bei gegebenem Inhalt (hier Luftinhalt).

Eine Seifenblase setzt die Luft in ihr unter Druck. Man bemerkt dies, wenn man sie bei offenem Blaserohr sich selbst überläßt; sie zieht sich dann mit der Kraft der Oberflächenspannung zusammen und bläst die Luft heraus. Der Druck im Inneren einer Blase vom Radius r ist leicht berechenbar. Man denke die Blase durch einen Äquator in zwei Halbkugeln zerlegt, die vermöge der Oberflächenspannung zusammenhaften, was an der Länge des Äquatorumfanges $2r\pi$ mit der Kraft $2r\pi\alpha$ geschieht und zwar sowohl an der äußeren als auch an der inneren Oberfläche der Blase, im ganzen also mit der Kraft $4r\pi\alpha$. Diese Kraft, ins Verhältnis gesetzt zur Äquatorfläche $r^2\pi$, auf welche sie vermöge der zwei Halbkugeln wirkt, gibt den Druck $p = 4r\pi\alpha/r^2\pi = 4\alpha/r$. Man sieht, daß der Druck bei kleinen Blasen am größten ist. Man kann ihn auch leicht messen (mittels eines an das Blaserohr geschalteten Druckmessers, wie Abb. 87) und aus ihm, zusammen mit dem Radius r der Blase, die Oberflächenspannung der Seifenlösung berechnen. Daß man sie hierbei von gleicher Größe findet, wie auf anderen Wegen, beweist wieder die Richtigkeit der zugrundeliegenden Vorstellungen und Überlegungen.

Es zeigt sich übrigens hierbei auch, daß die Oberflächenspannung von Seifenlösungen sehr viel kleiner ist als die des reinen Wassers (vgl. Tab. 10). Die besondere Haltbarkeit der Seifenblasen, im Vergleich zur Vergänglichkeit von Blasen aus reinem Wasser, hat somit nichts mit großer Oberflächenspannung zu tun. Diese Haltbarkeit hängt vielmehr mit der uneinheitlichen Beschaffenheit von Seifenlösungen zusammen, worauf wir noch zurückkommen (331).

Die geringe Oberflächenspannung der Seifenlösung trägt wesentlich bei zur guten Waschwirkung der Seife; denn zum Waschen einer Fläche muß die Waschflüssigkeit leicht über derselben sich ausbreiten, und dem wäre eine große Oberflächenspannung hinderlich (328, s. besonders 335)[1].

326. Drucke gekrümmter Flüssigkeitsoberflächen. — Das Ergebnis über den Druck in der Seifenblase, wonach er beim Radius r die Größe $p = 4\alpha/r$ hat, oder von nur einer der beiden Oberflächen $2\alpha/r$, ist ganz allgemein gültig für jede mit α gespannte, nach r gekrümmte Oberfläche. Eine solche wird stets den Druck $2\alpha/r$ nach ihrer hohlen Seite hin ausüben müssen.

---

[1]) Auch die neueren Waschmittel haben in Lösung sehr geringe Oberflächenspannungen.

Man kann diesen Druck auch für jedes kleine Stück einer beliebig gekrümmten Fläche berechnen, wenn man die am Rande des Flächenstücks angreifenden Kräfte — α an jeder Längeneinheit — nach dem Parallelogrammsatz zu einer Resultierenden vereinigt, die durch die Mitte des Flächenstückes gehen und senkrecht zu demselben nach der hohlen Seite hin gerichtet sein wird. Diese resultierende Kraft, dividiert durch die Größe des Flächenstücks, gibt den Druck, und man findet bei kugeliger, einfach gekrümmter Fläche wieder $2\alpha/r$. Dieselbe Rechnung, durchgeführt für eine doppelt gekrümmte Fläche mit dem kleinsten Krümmungsradius r_1 und dem größten r_2 (wie es z. B. auch eine Zylinderfläche ist, wobei r_1 der Zylinderradius und $r_2 = \infty$ wäre), gibt, indem man für die eine Hälfte des Umfangs des Flächenstücks mit r_1, für die andere Hälfte mit r_2 zu rechnen hat,

$$p = \alpha\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \qquad 326)$$

was für $r_1 = r_2 = r$ in das vorige Ergebnis übergeht, wie es sein soll.

Die Gleichung 326 für den Druck, den eine beliebig gekrümmte Flüssigkeitsoberfläche nach ihrer hohlen Seite hin ausübt, gibt den Schlüssel zur zutreffenden Berechnung aller Einzelheiten der Formung von Flüssigkeitsoberflächen, die mit bekannten Drucken im Gleichgewicht sein sollen. Beispielsweise sind an den drei Punkten a, b, c des hängenden Tropfens Abb. 78 infolge der Schwere der Flüssigkeit drei verschiedene Drucke von innen nach außen wirksam. Geht man vom Punkte a aus, so nimmt der Druck beim Aufsteigen um irgend eine Höhe h um hs ab (Gl. 301). Diesen Druckstufen muß die Krümmung der Oberfläche überall am ganzen Tropfen so angepaßt sein, daß in jeder Höhe dem Schweredruck durch den Druck p der Oberflächenspannung nach Gl. 326 das Gleichgewicht gehalten wird. Es muß also beim Fortschreiten von a nach b nach c $\alpha(1/r_1 + 1/r_2)$ in gleichen Stufen sich ändern wie hs. Im tiefsten Punkte a sind die beiden Krümmungsradien r_1 und r_2 einander gleich; die Tropfenoberfläche gehört dort der in der Abb. 78 eingezeichneten Kugel mit dem Mittelpunkt m an; es ist $r_1 = r_2 = \overline{am}$. Bei b muß die Krümmung geringer sein, entsprechend dem geringeren Druck; man sieht auch in der Abbildung den jetzt zu $\overline{bn_2}$ vergrößerten Krümmungsradius, und auch der zweite Krümmungsradius ist etwas größer, nämlich $r_2 = \overline{bn_1}$. Bei c ist der eine Krümmungsradius $\overline{co}$ negativ geworden, da der Krümmungskreis außen liegt, der andere ist noch positiv und ist gleich dem Rohrradius r. Da $\overline{co} > r$, wie die Abbildung zeigt, so bleibt noch Druck nach innen zu übrig, und es muß $\overline{co}$ jetzt wieder die der Höhenstufe von b nach c entsprechende Größe haben. Der an der Ansatzstelle c des Tropfens in dieser Weise noch übrig bleibende geringe Druck der Oberflächenspannung nach innen entspricht im betrachteten Beispielsfalle des Wassertropfens der Abb. 78 einer Wassersäule von 11 mm Höhe, und diese im Ausflußrohr befindliche Säule wird daher nebst dem eigentlichen, vom Rohr zuletzt (mit Zurücklassung eines kleinen Restes) abfallenden Tropfengewicht von der Oberflächenspannungskraft $2r\pi\alpha$ getragen. Daher die nur angenäherte Gültigkeit von Gl. 321 für das Tropfengewicht.

In derselben Weise können alle Formungen von Flüssigkeitsoberflächen berechnet werden, die entstehen, wenn die Schwere einer Flüssigkeit und ihre Oberflächenspannung sich das Gleichgewicht halten, was ein sehr häufiger Fall ist und wovon wir noch mehrere Beispiele bringen werden (327, 337, 338)[1].

327. Abreißen benetzter Körper von Flüssigkeiten. — Eine sehr unmittelbare und mit höchster Genauigkeit durchführbare Meßweise der Oberflächenspannung („Bügelmeßweise", „Abreißmethode", „Kapillarwaage") benutzt einen dünnen Draht CE (Abb. 81), der in einem Rahmen BCDE aus dickerem Draht horizontal ausgespannt ist und so mittels des Hakens A an

---

[1]) Die vollständige Durchführung der Rechnung, deren Grundlage nur die einfachen Gl. 326 und 301 sind, bietet in den allermeisten und sogar in den gewöhnlichsten Fällen (so auch bei dem oben betrachteten hängenden Tropfen) große Umständlichkeit. Man erhält nur in Annäherungen vollständige Auskünfte über die Formen der Oberflächen. Es ist dies wieder ein Beispiel der Umständlichkeit der vorhandenen Mathematik bei einfachstem Sinn der Rechnung.

eine Waage (am besten Federwaage) gehängt werden kann. Man bringt die zu untersuchende Flüssigkeit in einer Schale von unten her bis an den Draht, so daß dieser benetzt wird, und senkt dann die Schale. Hierbei entsteht die in der Abb. 81 schraffierte Flüssigkeitshaut zwischen dem Draht und der Flüssigkeitsoberfläche o o in der Schale. Die Kraft P, mit welcher diese Haut den Draht nach unten zieht, kann dann mit der Waage leicht gemessen werden, und es ist $P = 2\alpha l$, stammend von der vorderen und der hinteren Fläche der Flüssigkeitshaut, die beide an der Drahtlänge l ziehen. Hieraus ist α nach Messung von P und l berechenbar. Mit zu berücksichtigen ist für volle Genauigkeit noch das Gewicht der am Drahte mitgehobenen Flüssigkeit und der Einfluß der Rahmendrähte, was aber mittels einfacher Nebenversuche und einer kleinen Rechnung (die grundsätzlich Neues nicht enthält) vollkommen erschöpfend geschehen kann[1]).

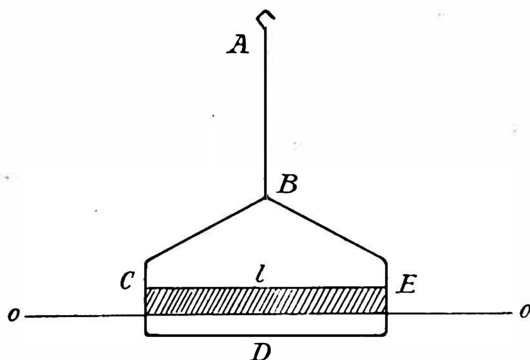


Abb. 81. Meßbügel für Oberflächenspannung.

Abb. 82 zeigt in einem zum Draht senkrechten Schnitt die Form der hochgezogenen Flüssigkeitsoberfläche für einen übertrieben dick angenommenen Draht (dessen Querschnitt schraffiert ist)[2]).

Auf Haltbarkeit der bei dieser Messung am Draht hochgezogenen Flüssigkeitshaut (deren Dicke in der Abb. 82 entsprechend der Drahtdicke sehr übertrieben ist) kommt es gar nicht an; die Haut kann sofort nach der stets gut ausführbaren Wägung platzen; nur muß der Draht gut benetzt sein, damit bei der Auswägung von P nicht die Flüssigkeit vom Draht, sondern Flüssigkeit von Flüssigkeit abreißt.

328. Ausbreitung einer Flüssigkeit auf einer anderen. — Bemerkenswerte besondere Wirkungen der Oberflächenspannung findet man in den Ausbreitungserscheinungen, die eintreten, wenn zwei Flüssigkeitsoberflächen aneinander grenzen. Es breitet sich dann die Flüssigkeit mit der geringeren Oberflächenspannung über die Oberfläche der anderen aus, weil an der Grenzlinie beider Oberflächen die Differenz der Oberflächenspannungen als resultierende Kraft wirksam wird.

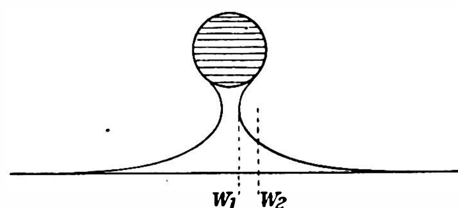


Abb. 82. An benetztem, geradem Draht hochgezogene Flüssigkeit (Querdurchschnitt).

So breitet sich ein Tropfen Alkohol (Oberflächenspannung nur 2·3 mgr/mm) auf Wasser gebracht (Oberflächenspannung über 7 mgr/mm) sogleich über die Wasseroberfläche aus. Die ausgebreitete Flüssigkeit bedeckt dann als sehr dünner Überzug die ganze Oberfläche der anderen Flüssigkeit. Wasser- und auch Quecksilberoberflächen werden wegen

[1]) Die Rechnung für andere, z. B. ringförmige Abreißkörper ist nicht mit voller Genauigkeit in fertige Formel zu bringen. Vgl. die Fußnote zu 326.

[2]) Auch diese Oberflächenform kann gerechnet werden, wie oben angegeben (326).

ihrer großen Spannung (vgl. Tab. 10) besonders leicht durch Ausbreitung fremder Flüssigkeiten verunreinigt.

Im Falle des Alkohols auf Wasser erfolgt nach der Ausbreitung sofort Auflösung und Diffusion des Alkohols ins Innere des Wassers. Auch Öl (Oberflächenspannung 3·3 mgr/mm) breitet sich auf Wasser aus, und in diesem Falle ist der dünne Überzug haltbar, da Öl vom Wasser nicht gelöst wird. Solche dünne Schichten zeigen prachtvolle Farben durch Lichtinterferenz, aus welchen man ihre Dicke berechnen kann (O 123 u. f.). Man sieht diese Farben öfter bei Regenwetter auf der Straße, wo ein Öltropfen auf Wasser gefallen ist. Ist die Dicke einer solchen Schicht nur $^1/_4$ der Wellenlänge des violetten Lichtes, d. i. 0·0001 mm, so erscheint sie bläulichgrau, ist sie nur halb so dick oder noch dünner, so wird sie schwarz.

329. Dicke der Seifenblasen und Wirkungsweite. — Solche, Farben zeigende dünne Schichten sind auch die Seifenblasen, und zwar sind sie freischwebend beiderseits durch Luft begrenzt. Dies ermöglicht einfache Überlegung in bezug auf die Wirkung der Molekularkräfte in so dünnen Schichten. Man sieht ein (vgl. 317 und Abb. 76), daß die Schicht mindestens die Dicke 2w des Durchmessers der Wirkungskugel haben muß, wenn alle Moleküle, die (wie m_2 in Abb. 76) noch eine Resultierende K ergeben, bei der Oberflächenspannung mitwirken sollen, wenn also die Oberflächenspannung ihre volle, auch bei großen Schichtdicken vorhandene Größe haben soll. Wäre aber die Oberflächenspannung an irgendeiner Stelle einer Seifenblase kleiner als an benachbarten, dickeren Stellen, so würde diese dünne Stelle sofort auseinandergezogen werden und die Blase müßte dort platzen. Man sieht daraus, daß die dünnsten Stellen noch haltbarer Seifenblasen dicker sein müssen als 2w. Da aber an Seifenblasen sehr gut der vollkommen schwarze Fleck gesehen werden kann, der — wie bemerkt — eine Dicke unterhalb 0·00005 mm anzeigt, so folgt, daß die Wirkungsweite w dort kleiner sein muß als die Hälfte hiervon, was mit der früher schon angegebenen durchschnittlichen Größe derselben, w = 0·00001 mm (248) stimmt.

330. Verunreinigte Oberflächen. — Ist eine Flüssigkeitsoberfläche durch Ausbreitung einer anderen Flüssigkeit von geringerer Oberflächenspannung verunreinigt (328), z. B. eine Wasseroberfläche durch Öl, so ist ihre Spannung verringert und zwar um so mehr, je dicker die verunreinigende Schicht ist[1]). Daher breitet sich Öl auf bereits verunreinigtem Wasser nicht mehr aus, sondern bleibt als flacher Tropfen schwimmen.

Die wellenberuhigende Wirkung des Öles, welche früher — als Schiffe noch kleiner waren — für die Seefahrer wichtig war, erklärt sich wohl daraus, daß Wellenbewegung auf Flüssigkeitsoberflächen mit dauernd wechselnder Vergrößerung und Wieder-Verkleinerung der Oberfläche verbunden ist[2]). Da bei Vergrößerung der Oberfläche die Ölschicht gedehnt und also dünner wird, bei Verkleinerung dicker, so geht die Vergrößerung stets gegen verstärkte Oberflächenspannung vor sich und es wird hierbei der Wellenbewegung mehr Energie entzogen als bei der

[1]) Ein Endwert der Verringerung ist zu erwarten, wenn die Dicke der verunreinigenden Schicht dem Durchmesser der Wirkungskugel in ihr gleich geworden ist. Man hat dann die Summe der Oberflächenspannungen der verunreinigenden Flüssigkeit und der Grenzfläche der beiden Flüssigkeiten zu erwarten; Grenzflächen zweier Flüssigkeiten haben aber wegen des Gegeneinanderwirkens der beiderseitigen Molekularkräfte meist nur geringe Oberflächenspannung (vgl. die entsprechenden Überlegungen für Grenzflächen gegen feste Körper 332, 333).

[2]) S. den longitudinalen Anteil der Wellen, A 12.

Wiederverkleinerung zurückgewonnen wird, was Aufzehrung des Energievorrats der Wellen bedeutet. Die veränderliche Kraft der Oberflächenspannung hat hier die Wirkung einer Reibungskraft. Unreine Wasseroberflächen halten sich glatt; nur das Wasser reiner Seen oder Flüsse wird vom leisesten Wind gekräuselt.

331. Auf der Ausbreitung beruht wohl auch die sehr auffallende Haltbarkeit von Häuten und Blasen gemischter Flüssigkeiten, wie der Seifenlösung. Im Wasser gelöste Seife scheidet stets freie Ölsäure aus, die in Form kleinster Tröpfchen in der Flüssigkeit verteilt ist, was auch deren Trübung verursacht. An jeder freien Oberfläche der Lösung findet eine Anreicherung der Ölsäure statt, weil jedes der Tröpfchen, das die Oberfläche erreicht, dort sich ausbreitet. Dies ist der Grund, warum Seifenlösung eine so sehr viel kleinere Oberflächenspannung hat (3·0 mgr/mm) als Wasser (7·4 mgr/mm), obgleich sie allergrößtenteils aus Wasser besteht. Ist eine Stelle einer Seifenblase in Dehnung begriffen, so daß sie zu zerreißen droht, und ist dort gleichzeitig auch die Ölsäureschicht in Verdünnung begriffen, was die Oberflächenspannung erhöht (330), so kann dadurch die Dehnung zum Stillstand kommen[1]). Bildet sich einmal ein Loch, so erfolgt das Zerplatzen der ganzen Blase in kleine Tröpfchen, weil dann die einseitig gewordene Oberflächenspannung den Wandinhalt tangential auseinanderschleudert.

332. Grenzflächen von Flüssigkeiten gegen feste Körper. — Es wirken an diesen Grenzflächen auch die von den Molekülen des festen Körpers auf die Flüssigkeitsmoleküle ausgeübten Kräfte mit. Dabei gilt die gleiche Überlegung wie bei freien Flüssigkeitsoberflächen (317, Abb. 76), nur daß auch die Kräfte der jetzt jenseits o o vorhandenen Moleküle des festen Körpers mit berücksichtigt werden müssen. Da diese Kräfte nach außen gerichtet sind, verkleinern sie die Resultierende K; ja sie können sogar deren Richtung umkehren, so daß sie — immer senkrecht stehend auf die Oberfläche — nach außen wirkt. Letzteres ist der Fall, wenn die Moleküle des festen Körpers größere anziehende Kräfte auf das betrachtete Flüssigkeitsmolekül m ausüben als die anderen Flüssigkeitsmoleküle.

333. Oberflächenspannung an fester Wand. — Der veränderlichen Größe oder auch Richtung von K entsprechend ist — nach der Überlegung wie für die freien Oberflächen (317) — die Oberflächenspannung der Flüssigkeit an der Grenze gegen den festen Körper nach Größe oder auch Richtung verändert. Wir bezeichnen diese besondere, an der Grenzfläche der Flüssigkeit gegen einen bestimmten festen Körper vorhandene Oberflächenspannung mit β. Während die Spannung α einer freien Oberfläche durch die Molekularkräfte der Flüssigkeit allein bestimmt ist, sind für β auch die Molekularkräfte zwischen Flüssigkeit und festem Körper mitbestimmend. Es ist nach Vorigem $\beta < \alpha$ zu erwarten, was mit einschließt, daß β Null und auch negativ sein kann. Letzteres bedeutet ein Streben nach Ausbreitung der Flüssigkeit längs der Oberfläche des festen Körpers, ein Streben der Vergrößerung der Grenzfläche der Flüssigkeit gegen den festen Körper, im Gegensatz zum Streben nach Verkleinerung einer freien Flüssigkeitsoberfläche, das dem positiven Zeichen von α entspricht.

Die Oberflächenspannung β ist somit maßgebend für Vergrößerung oder Verkleinerung der Grenzfläche flüssig-fest, wobei diese Oberflächenspannung in Gleichgewicht mit anderen Kräften kommen kann.

Andere als tangentiale Bewegungen der Flüssigkeitsteile längs der Grenzfläche flüssig-fest sind nicht zu betrachten; denn Flüssigkeit und fester Körper

[1]) Auch für die haltbaren Schäume der neueren Waschmittel gilt diese Erklärung, denn sie erniedrigen die Oberflächenspannung des Wassers ebenfalls sehr stark und zwar auch schon in sehr verdünnter Lösung, häufen sich also an der Oberfläche wie die Ölsäure der Seifenlösung.

bleiben stets durch den noch weiter zu untersuchenden inneren Druck (320, 341) senkrecht aufeinander gepreßt, der auch an dieser Grenzschicht wie überall im Körperinneren wirkt, wenn überhaupt anziehende Molekularkräfte tätig sind.

334. Randwinkel. — Sehr oft grenzt eine freie Flüssigkeitsoberfläche an eine Gefäßwand. Es wirken dann am Rande der freien Oberfläche die beiden Spannungen α und β zusammen. Wir werden mehrere charakteristische Fälle dieser Art betrachten (334—336).

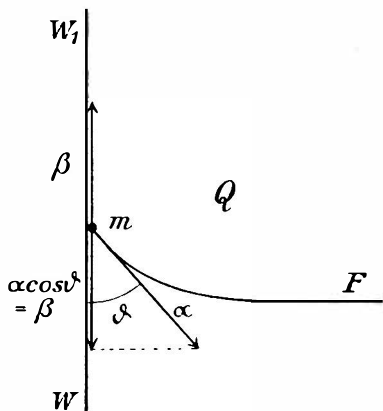


Abb. 83. Randwinkel.

Es sei zunächst β negativ und dem Absolutwert nach $\beta < \alpha$. Es ist dies der gewöhnliche Fall bei den meisten Flüssigkeiten in Glasgefäßen. Es greift dann bei m (Abb. 83) an der Längeneinheit der (zur Abbildung senkrecht stehenden) Grenzlinie der Flüssigkeit mit der festen Wand $W\,W_1$, wo die freie Flüssigkeitsoberfläche mF und die Grenzfläche fest-flüssig mW zusammenkommen, die Kraft β an, welche die Flüssigkeit längs der Wand überall hin auszubreiten strebt, und dieser Kraft β muß durch die eben dort angreifende Oberflächenspannung α der Flüssigkeit das Gleichgewicht gehalten werden. Es erfolgt dies dadurch, daß die Flüssigkeitsoberfläche unter dem Winkel ϑ zur Oberfläche des festen Körpers sich einstellt, sodaß $\alpha\cos\vartheta = \beta$, also $\cos\vartheta = \beta/\alpha$ wird. Der anderen, zur festen Oberfläche senkrecht stehende Komponente von α wird mit den vorbetrachteten, senkrecht zur Grenzfläche gerichteten Kräften (333) durch die elastischen Kräfte des festen Körpers das Gleichgewicht gehalten. Der so durch β und α bestimmte Winkel ϑ zwischen der letzten Tangentialebene der Flüssigkeitsoberfläche am festen Körper und der Oberfläche des letzteren wird der **Randwinkel** der betreffenden Flüssigkeit an dem festen Körper genannt[1]). Er ist unabhängig von etwaigen, außer den Molekularkräften mitwirkenden Kräften, so auch von der Schwerkraft; jede freie Oberfläche der betreffenden Flüssigkeit wird an dem betreffenden festen Körper stets unter diesem Winkel Gleichgewicht finden. Nur die weitere Formung der Flüssigkeitsoberfläche, wo sie den festen Körper nicht berührt, ist von den anderen Kräften abhängig, wofür beispielsweise in Abb. 83 die Mitwirkung der Schwerkraft angenommen ist, worauf wir zurückkommen (337).

Beim spitzen Randwinkel $\vartheta < 90^0$, entsprechend negativem β, wie hier betrachtet, sagt man: Die Flüssigkeit „benetzt" den betreffenden festen Körper.

Der Randwinkel kann durch Lichtreflexe an den Oberflächen gemessen werden. Er ist, wie β, in leicht begreiflicher Weise von etwaigen verunreinigenden Überzügen der festen Oberfläche sehr abhängig. Bei nicht einheitlichen, z. B. auch kristallinischen festen Körpern kann er auch von Stelle zu Stelle verschieden sein.

335. Vollkommene Benetzung. Ist bei negativem β dem Absolutwert nach $\beta > \alpha$, so ist Gleichgewicht nicht möglich; es wird dann unter der Wirkung der Kraftdifferenz $\beta - \alpha$ die Flüssigkeit über die gesamte Oberfläche des festen Körpers ausgebreitet, wobei der **Randwinkel** $\vartheta = 0^0$ wird. Dies ist der Fall „vollkommener Benetzung" des festen Körpers durch die Flüssigkeit. Er tritt z. B. bei Wasser an ganz reinen Glasoberflächen ein. Je kleiner α ist, desto besser wird demnach eine Flüssigkeit zur Ausbreitung an beliebigem festem Körper geeignet sein.

336. Nichtbenetzung. — Ist $\beta = 0$, so wird, wie leicht einzusehen, der Randwinkel $\vartheta = 90^0$.

Ist β positiv, was eintritt wenn die anziehenden Molekularkräfte des festen Körpers für die Flüssigkeit gering sind, so daß die Anziehungen der Flüssigkeitsmoleküle untereinander überwiegen, so hat die Oberfläche der Flüssigkeit auch dort, wo sie an den festen Körper grenzt, ihr

[1]) Über die Formung der Flüssigkeitsoberfläche dicht an der festen Wand, innerhalb Abständen von der Größe der Wirkungsweiten sagen unsere Überlegungen nichts aus; diese Formung muß von den Einzelheiten der Abstandsgesetze der wirksamen Molekularkräfte abhängen.

Verkleinerungsbestreben; nur wird im allgemeinen $\beta < \alpha$ sein. Bloß im Grenzfalle ganz verschwindend kleiner Molekularkräfte des festen Körpers gegenüber denen der Flüssigkeit, könnte $\beta = \alpha$ sein. Es wird daher in all diesen Fällen die Flüssigkeit überall auf möglichst kleine Oberfläche sich formen, nur wird dies an der Grenze gegen den festen Körper mit der im allgemeinen kleineren Kraft β geschehen, an der freien Oberfläche mit der größeren Kraft α. Es muß dann wieder β mit α ins Gleichgewicht sich setzen, was wieder unter einem gewissen Winkel ϑ erfolgt, sodaß $\cos\vartheta = \beta/\alpha$ ist[1]). Man kann dazu Abb. 83 umgekehrt betrachten, was ungefähr dem Fall von Quecksilber (Q) an Glas entspricht. Da man den Randwinkel ϑ stets innerhalb der Flüssigkeit mißt, ist hier $\vartheta > 90^0$ ($180^0 - \vartheta$ in der Abbildung), was auch ganz dem hier entgegengesetzten Vorzeichen von β entspricht. Es ist dies der Fall der „Nichtbenetzung".

Im Falle „vollkommener Nichtbenetzung", wenn gar keine anziehenden Molekularkräfte zwischen fest und flüssig wirken, wäre $\vartheta = 180^0$. Dieser Fall ist nahe verwirklicht bei Wasser an fettigen Oberflächen. So bei den auf Wasser laufenden Insekten, deren Beine das Wasser berühren ohne benetzt zu werden, wobei das Gewicht ihres Körpers kleine Grübchen in die Wasseroberfläche drückt, so daß das aus dem Grübchen verdrängte Wasser nach Archimedes Satz (307) den nötigen Auftrieb gibt, der sie vor dem Versinken bewahrt.

337. Mitwirkung der Schwerkraft. — Quecksilber an Glas hat einen Randwinkel ϑ von etwa 140^0. Ohne Mitwirkung der Schwere — etwa im Mittelpunkt der Erde — würde daher eine (beliebig große) Quecksilbermasse an einer Glasplatte sitzen wie es Abb. 84 zeigt. Die Begrenzung gegen Luft oder leeren Raum ist kugelförmig wegen der Oberflächenspannung des Quecksilbers, und die Kugel muß unter dem Winkel von 140^0 an die Glasoberfläche grenzen; hierdurch sind alle Molekularkräfte ins Gleichgewicht gesetzt.

Kommt noch die Schwerkraft hinzu, wie an der Oberfläche der Erde, so kann Gleichgewicht werden, wenn die Glasoberfläche horizontal steht; das Quecksilber wird dann durch seine Schwere flach gedrückt (Abb. 85), immer zusammengehalten in seiner gespannten Oberfläche, deren Krümmung in jeder Höhe so sich einrichten muß, daß dem dort herrschenden Schweredruck das Gleichgewicht gehalten wird, wofür wieder Gl. 326 mit 301 maßgebend ist. Diese Oberflächenformung muß gleichzeitig wieder so eingerichtet sein, daß an der Grenze gegen das Glas der Randwinkel von 140^0 statthat[2]).

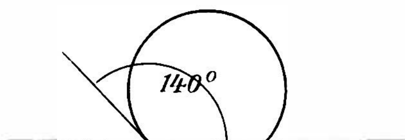


Abb. 84. Quecksilber an Glas ohne Schwerkraft. (Sehr kleiner, oder beliebig großer Tropfen im Erdmittelpunkt).

Daher wird dieselbe Oberflächenform — jedoch nur zu einem Teile ausgebildet — auch bei Quecksilber in einem vertikalen kreiszylindrischen Glasrohre vom Durchmesser 2r (s. Abb. 85) statthaben.

Vollkommen Gleichartiges gilt — weil dieselben Kräfte wirken, nur wegen der Verschiedenheit von α, s und ϑ in verschiedenem Maße — z. B. für die Form von Luftblasen in Wasser unter einer horizontalen Glasplatte oder von Wasseroberflächen in Röhren; man kann dazu die Abb. 85 verkehrt betrachten. Die zugehörigen Rechnungen werden trotz der Einfachheit der maß-

---

[1]) Der Übergang von der einen Richtung der Flüssigkeitsoberfläche in die andere muß dicht an der festen Oberfläche erfolgen, innerhalb eines Abstandes von der Größe der Wirkungsweite von der Oberfläche.

[2]) Bei beliebig geformter Glasoberfläche wird dazu im allgemeinen die Freiheit der Wahl beider Krümmungsradien in Gl. 326 dienen müssen.

gebenden Gleichungen 326 und 301 und dem zum voraus als ermittelt anzunehmenden Randwinkel sehr verwickelt [1]).

338. **Meniskus.** — Am einfachsten ist der Fall einer **Flüssigkeitsoberfläche**, **die an eine ebene vertikale Wand grenzt.** Die Oberflächenform ist dann z. B. für Wasser genau dieselbe wie am gradlinigen Draht in Abb. 82 ersichtlich, nur daß bloß der Teil rechts von w_1 zur Geltung kommt, falls der Randwinkel 0^0 (und w_1 die Wand) ist, bzw. nur der Teil rechts von w_2, falls der Randwinkel größer ist (vgl. auch Abb. 83).

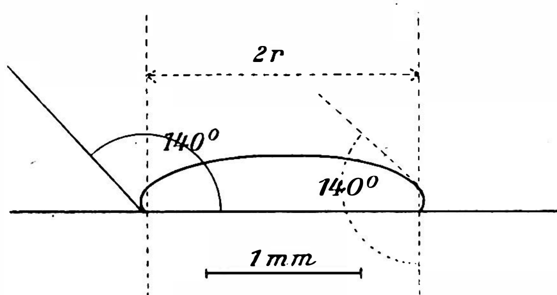


Abb. 85. Quecksilber auf Glas (durch die Schwerkraft flachgedrückter Tropfen) oder Quecksilber in Glasrohr vom Durchmesser 2r.

Man findet die Höhe, bis zu welcher die Flüssigkeitsgrenze an ebener Wand über die ebene Horizontaloberfläche der Flüssigkeit gehoben ist (Höhe von m über F in Abb. 83), „**Höhe des Meniskus**" genannt, $a = \sqrt{2\beta/s} = \sqrt{2\alpha\cos\vartheta/s}$ (also $a = \sqrt{2\alpha/s}$, wenn $\vartheta = 0^0$), was z. B. bei Wasser ($\alpha = 7{\cdot}40$ mgr/mm, $s = 1$ mgr/mm³) an vollkommen benetzender Oberfläche 3·76 mm gibt.

Unmittelbar leicht angebbar ist das **Gewicht** des über die Horizontaloberfläche der Flüssigkeit gehobenen Flüssigkeitsteiles — des „**Meniskus**" —; es muß $\alpha\cos\vartheta$ mgr für jedes mm Grenzlinie betragen, weil $\alpha\cos$ (bzw. β) die hebende Kraft ist, und dies muß auch für beliebig gekrümmte, vertikale Wände gelten.

339. **Steighöhen in Röhren (Kapillarität).** — In derselben Weise ist ohne weiteres das Ansteigen von benetzenden Flüssigkeiten in engen Röhren berechenbar (Abb. 86). Die Erscheinung war frühe schon aufgefallen als eine Abweichung vom gleich hohen Stande einer Flüssigkeit in verzweigten (hohlverbundenen) Räumen (306). Die Abweichung zeigt unmittelbar, daß außer der Schwere der Flüssigkeit — welche jenen gleich hohen Stand gäbe — noch eine andere Kraft mitwirken muß. Diese andere Kraft ist die der Oberflächenspannung β der Flüssigkeit am festen Körper. Es wirkt an jedem mm der Grenzlinie der Flüssigkeitsoberfläche im Inneren des Rohres die Kraft β mgr, im ganzen also $2r\pi\beta$ mgr, und zwar nach oben wenn β negativ ist (333) wie im Falle der Benetzung (334). Diese Kraft ist (mittels

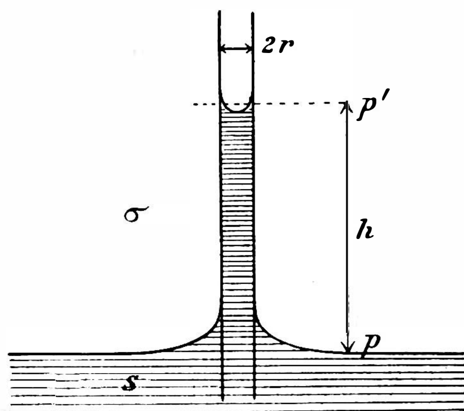


Abb. 86. Kapillare Steighöhe.

[1]) Vgl. die Note zu 326.

der Oberflächenspannung der Flüssigkeit) verteilt auf den Rohrquerschnitt $r^2\pi$, was einen Druck von der Größe $2r\pi\beta/r^2\pi = 2\beta/r$ gibt. Diesem Druck wird das Gleichgewicht gehalten durch den entgegengesetzt gerichteten Schweredruck hs der Flüssigkeitssäule h (301)[1]. Es ist daher $2\beta/r = hs$ und also die „kapillare" Steighöhe

$$h = \frac{2\beta}{rs}. \qquad 339)$$

Im Falle vollständiger Benetzung tritt α anstelle von β (335) und es ist

$$h = \frac{2\alpha}{rs}. \qquad 339a)$$

Im Falle der Nichtbenetzung hat β das entgegengesetzte Vorzeichen (336), wonach es auch h in Gl. 339 erhält; es steht dann die Flüssigkeitsoberfläche im engen Rohre tiefer als im weiten („Kapillar-Depression"), wie z. B. bei Quecksilber in Glas.

Man sieht, daß nach diesen Gleichungen die Ermittelung von Oberflächenspannungen β bzw. α mittels Messungen von h und r erfolgen kann.

Die Steighöhe h ist nach den Gleichungen 339, 339a proportional der Oberflächenspannung β bzw. α und verkehrt proportional dem spezifischen Gewicht s der Flüssigkeit, was unmittelbar verständlich ist; sie ist außerdem verkehrt proportional dem Rohrradius r. In einigermaßen weiten Röhren verschwindet daher die Steighöhe, da α/s immer nur sehr klein ist. Bei $r = 10$ mm ist für Wasser und vollkommene Benetzung h nur 1·5 mm; für Quecksilber ist selbst bei vollkommener Nichtbenetzung h — in diesem Falle negativ — noch kleiner (nur 0·7 mm). In sehr engen Röhren kann h sehr beträchtlich werden; es würde bei $r = 0$ sogar $h = \infty$. Jedoch ist zu bedenken, daß die Berechnung der Gleichungen ihre Gültigkeit verlieren muß, sobald Abmessungen in Betracht kommen, die kleiner sind als die Wirkungsweite. Man könnte noch mit $r = 0·00001$ mm rechnen (248), was für Wasser bei vollkommener Benetzung $h = 1480$ m gäbe; für noch engere Röhren muß h hinter dem nach Gl. 339 berechneten Werte zurückbleiben und einer Grenze zustreben, da dann die Molekularkräfte nicht mehr voll zur Wirkung kommen können. Jedenfalls ist hiernach das beträchtliche Hochsteigen benetzender Flüssigkeiten in Dochten, im Löschpapier, auch in porösen Mauern verständlich. Auch das für das Leben der Pflanzen so wichtige Hochsteigen des Grundwassers in der Ackerkrume gehört hierher. Zu bedenken ist in solchen Fällen immer, daß die Flüssigkeit nur dann zur berechneten Höhe h steigt, wenn das Rohr überall den in die Gleichung gesetzten Durchmesser 2r hat oder einen kleineren. Ein unten weiteres Rohr, das nur oben auf den Durchmesser 2r sich verengt, kann allerdings auch die ganze Säule h tragen, wie es der Herleitung der Gleichung entspricht, doch füllt es sich nicht von selber, sondern es muß die Oberfläche durch äußere Kräfte erst an die enge Stelle gebracht sein.

---

[1]) Die Kräfte am unteren Meniskus, außen am Rohre, kommen garnicht in Betracht, wenn h vom ebenen Teil der Flüssigkeitsoberfläche im genügend weiten unteren Gefäß an gerechnet wird, wie oben angenommen. Wäre die Flüssigkeit unten in engem Gefäß, so käme nur die Differenz von zwei Steighöhen zur Geltung. Das obere Ende von h muß dort liegen, wo die ganze durch die Kraft der Oberflächenspannung gehobene Flüssigkeitssäule bei gleichem Gewicht in einer horizontalen Ebene enden würde, d. i. ein wenig (bei engem Rohr sehr nahe um r/3) oberhalb des tiefsten Oberflächenpunktes in der Röhre, wie es die Abb. 86 darstellt.

Für das Hochsteigen der Säfte innerhalb der Pflanzen kann nicht Gl. 339 allein maßgebend sein; denn die Bäume befördern ihre Säfte mit innerem Überdruck nach oben, während kapillare Steigröhren Unterdruck haben. Es kann jedoch hier die negative Oberflächenspannung β (333) an festen Wänden in Betracht kommen, die weder besonders enger Röhren, noch — wie die später zu betrachtende Osmose (368) — halbdurchlässiger Zwischenwände bedarf. Sie befördert beliebige Flüssigkeitsmengen in Schichtdicken unterhalb Wirkungsweite entlang vollkommen benetzenden festen Wänden (335), und es erfolgt dies mit Drucken, gegen welche die Schweredrucke sehr hoher Flüssigkeitssäulen klein sind (vgl. 342, auch 345). Das Vorhandensein freier Flüssigkeitsoberflächen ist dabei nicht wesentlich. Man sieht solches „Kriechen" an Gefäßwänden auf weite Strecken bei Salzlösungen, wenn sie die Eigenschaft vollkommener Benetzung der Wände (große negative Grenzflächenspannung β) besitzen; auch Schwefelsäure kriecht an Bleioberflächen entlang. Auch im Tierkörper dürfte die Ausbreitung von Flüssigkeiten — z. B. von Drüsenausscheidungen — längs den zugehörigen Wänden, die mit großen Molekularkräften diesen Flüssigkeiten gegenüber ausgestattet sein können, eine erhebliche Rolle spielen.

340. Oberflächenspannung wohlgeprüft. — Wir haben im Vorhergehenden die große Menge von Erscheinungen gezeigt, die alle durch die Vorstellung von der Oberflächenspannung verständlich werden. Jede dieser Erscheinungen, die überhaupt Meßbares darbietet, konnte auch zur Ermittelung der Größe der Oberflächenspannung dienen (vgl. 321, 323, 325, 327, 337, 339). Die Übereinstimmung der dabei erhaltenen Ergebnisse, z. B. für die Oberflächenspannung des Wassers, geht überall so weit als es die erreichbare Meßgenauigkeit erwarten läßt, und dies ist der Nachweis für die Richtigkeit und Vollständigkeit der entwickelten Erklärungen der Erscheinungen aus der Oberflächenspannung („Kapillaritätstheorie"). Mit größter Genauigkeit waren die Messungen der Oberflächenspannung mittels der Methode des Abreißens (327) und der der Steighöhen (339) durchführbar, und die im Falle des Wassers gut geprüfte Übereinstimmung dieser zwei sehr verschiedenen Methoden ist besonders bemerkenswert und beweisend.

341. Oberflächenspannung und innerer Druck sind beides Äußerungsweisen der schon betrachteten anziehenden Molekularkräfte der Flüssigkeiten (317, 320). Es müssen, wegen der gemeinsamen Ursache, Oberflächenspannung und innerer Druck in bestimmter Beziehung zueinander stehen[1]). Diese Beziehung zeigt sich bei der Betrachtung der zugehörigen Energiegrößen (342).

Vor allem ist zu bemerken, daß der innere Druck zwar überall im Inneren der Flüssigkeit vorhanden ist, wie ein von außen her ausgeübter Druck (298), daß er aber nicht etwa ein von der Oberfläche her durch die Kraft K (317 und Abb. 76) auf das Innere ausgeübter Druck ist. Denn die Gegenkraft zu K an einer Oberflächenstelle befindet sich nicht etwa an einer entfernten, entgegengesetzt liegenden Oberflächenstelle, sondern sie befindet sich in dichter Nachbarschaft unter der Oberfläche. Es ist jedes einzelne (nicht zu kleine) Raumelement der Flüssigkeit, das sich durch die anziehenden Kräfte der darin befindlichen Moleküle selber unter Druck hält. Kraft und Gegenkraft greifen dabei an Molekülen desselben Raumelementes an; es sind innere Kräfte (216) der Raumelemente, welche den inneren Druck hervorbringen[2]).

[1]) Einander gleichzusetzen sind sie schon deshalb keinesfalls, weil sie verschiedenes Maß haben, also Größen verschiedener Art sind. Oberflächenspannung ist Kraft/Länge (318); Druck ist Kraft/Fläche (257).

[2]) Es wirken dabei wohl am meisten unmittelbar benachbarte Moleküle, und zwar besonders mit ihren äußeren Teilen aufeinander (vgl. 342, 248).

Gleichgewicht gehalten wird dem inneren Druck ebenfalls in jedem Raumelement selbst, nämlich durch die Molekülstöße der Wärmebewegung (vgl. 282 und W 34) zusammen mit den abstoßenden Kräften der Moleküle, welche bei sehr dichter Annäherung wirksam werden (249). Ohne den inneren Druck würden die Moleküle der Flüssigkeit durch ihre Wärmebewegung alle auseinanderfahren; die ganze Flüssigkeit würde in Dampfzustand übergehen.

Der Unterschied zwischen dem Flüssigkeitsinneren und der Oberfläche besteht darin, daß im Inneren die Richtung der anziehenden Kräfte dauernd allseitig wechselt, während an der Oberfläche die einseitig gerichtete Kraft K resultiert, wie bereits betrachtet (317).

Nach außen bringt der innere Druck nur wenig unmittelbare Wirkungen hervor (vgl. 342, 368); die besten Auskünfte über seine Größe waren bisher aus Betrachtungen des gasförmigen Zustands zu erhalten. Setzt man ein Gas unter so hohen äußeren Druck, daß die Moleküle schon fast so nahe aneinander kommen wie in der Flüssigkeit, so merkt man, daß zum äußeren Druck der innere Druck hinzukommt, indem das Volum des Gases mehr schrumpft als es dem äußeren Druck allein entspräche. Da dies gesetzmäßig erfolgt (360), kann aus den Messungen an Gasen auf den inneren Druck der Flüssigkeit geschlossen werden. Solche Schlüsse vom Gaszustand auf die Flüssigkeit haben sich mehrfach bewährt (360, W 213). Die inneren Drucke der Flüssigkeiten zeigen sich darnach sehr hoch. Wir werden zu einer angenäherten, doch die Hauptsache erfassenden Rechnung den inneren Druck P = 2000 Atm. setzen, was für eine Anzahl gut untersuchter Stoffe paßt [1]).

342. Arbeit zu Neubildung von Flüssigkeitsoberfläche. — An der Oberfläche wird der innere Druck P einseitig durch die Kraft K bewirkt (341, Abb. 76). Es hat daher P, als Kraft auf 1 mm^2, auch die Bedeutung der Kraft, welche auf alle in 1 mm^2 Oberflächenschicht enthaltene Moleküle zusammengenommen senkrecht nach innen wirkt [2]). Die Dicke dieser Schicht, in welcher die Kraft K noch wirkt, ist gegeben durch die Wirkungsweite w; tiefer als w ist K = 0.

Soll Oberfläche neu gebildet werden, so muß gegen diese nach innen gerichtete Kraft gearbeitet werden, um die für die Oberflächenvergrößerung nötigen Moleküle herauszubefördern. Diese Arbeit, gegeben — wie immer — durch das Produkt aus Kraft und Weg, ist für 1 mm^2 neue Oberfläche $P \cdot w$, denn w ist der Weg längs welchem die Kraft wirkt.

Diese Arbeitsleistung zur Neugewinnung von 1 mm^2 Oberfläche ist aber auch durch die Oberflächenspannung α gegeben. Denn α ist die Kraft in mgr, welche an 1 mm Grenzlinie schon vorhandener Oberfläche wirkt; bewegt man diese Grenzlinie quer zu ihrer Richtung, in Oberflächenrichtung, gegen die Kraft α unter Neubildung von Oberfläche um 1 mm weiter, so wird die Arbeit αmgr mm geleistet und dabei 1 mm^2 neue Oberfläche gewonnen. Nach dem Energiegesetz kann die Erreichung eines bestimmten Endzustandes aus gegebenem Anfangszustand auf verschiedenen Wegen nur unter gleicher Arbeitsleistung erfolgen; es muß daher

$$P \cdot w = \alpha \qquad 342)$$

sein, und dies ist der Zusammenhang zwischen dem inneren Druck P und der Oberflächenspannung α [3]).

Aus P und α kann hiernach die Wirkungsweite w berechnet werden. Setzt man rund α = 3 mgr/mm, was für Flüssigkeiten mit dem angenommenen Druck P = 2000 kgr/cm^2 (341) paßt, so ergibt sich $w = 1{\cdot}5 \cdot 10^{-7}$ mm = $0{\cdot}15\,\mu\mu$. Dies ist nur etwa Molekülradius (vgl. Tab. 1), und dies bedeutet, daß nur die äußerste Molekülschicht der Flüssigkeit mit großen Kräften ins Innere gezogen wird, während die darunter liegenden Schichten nur wenig zur Kraft K beitragen.

Obgleich also die Beobachtungen an dünnen Schichten flüssigen und festen Aggregatzustandes eine Wirkungsweite von etwa 10^{-5} mm für die Molekularkräfte angezeigt haben (248), werden große Kräfte doch nur in unmittelbarer Nachbarschaft, nur in den ersten Hundertteilen dieser Wirkungsweite gefunden. Dasselbe zeigt sich auch an den Gasmolekülen, wie bereits bemerkt (248).

Von gleicher Größenordnung wie die inneren Drucke P der Flüssigkeiten sind die Drucke zu erwarten, unter welche feste Wände die ihnen benachbarten Flüssigkeitsschichten bei voll-

[1]) Für Flüssigkeiten mit besonders großer Oberflächenspannung (wie Wasser, Quecksilber) ist P noch größer zu erwarten.

[2]) Dabei ist angenommen, daß die an der Oberfläche befindlichen Moleküle im selben Zustand sind, wie im Inneren. Dies trifft allerdings nicht zu; die elektrischen Doppelschichten an den Oberflächen (E 134) und die zeitliche Ausbildung der fertigen Oberflächenschicht (343) zeigen dies. Es kann schon aus diesem Grunde der Gl. 342 nur beschränkte Bedeutung zugemessen werden.

[3]) Siehe dazu die vorige Fußnote.

kommener Benetzung (335) setzen; es tritt dann $\beta > \alpha$ an die Stelle von α in Gl. 342. Diese hohen Drucke können in der schon betrachteten Weise (339) einseitig und daher in ihrer Wirkung nach außen merkbar werden, wenn die feste Wand an einer Stelle nicht von der Flüssigkeit bedeckt ist; es wird dann die Flüssigkeit unter dem großen Druck entlang der Wand weiterverbreitet.

343. Ausbildungszeit der Oberflächenspannung. — Die stets senkrecht nach innen gerichtete Kraft K, von welcher alle Moleküle der Oberfläche einer Flüssigkeit ergriffen sind (317), kann diese Moleküle auch in bestimmte Richtungen drehen und sie alle parallel stellen, wenn dieselben nicht kugelsymmetrisch beschaffen sind. Hierbei stört nur die Wärmebewegung. Jedenfalls wird an plötzlich neuentstehender Oberfläche der dem Auftreten der einseitig gerichteten Kraft entsprechende Zustand erst nach einiger Zeit fertig sich einstellen können. Diese Zeit ist allerdings sehr kurz. Besondere Messungen haben gezeigt, daß schon nach $^1/_{100}$ Sekunde die anfangs größer gefundene Spannung einer neugebildeten Wasseroberfläche ihren dann bleibenden, kleineren Endwert erreicht.

344. Feste Häute an Flüssigkeitsoberflächen. — Die parallel richtende Kraft K an den Flüssigkeitsoberflächen (343) hat wohl auch die Wirkung, daß aus Flüssigkeiten langsam sich ausscheidende feste Körper, die im Inneren nur fein zerteilt zusammenhanglos auftreten, an der Oberfläche leicht starre Häute bilden, die — obgleich oft unsichtbar dünn — alle Merkmale einer festen Platte zeigen können. Vielerlei Flüssigkeiten, besonders Gemische und Lösungen, bilden solche feste Häute. Läßt man einen Tropfen Milch auf einen kurze Zeit ruhig gestandenen Teeaufguß fallen, so sieht man die Milch nicht über die ganze Oberfläche sich ausbreiten (328), sondern nur in die oft zackigen Sprünge eintreten, die von der Einfallstelle aus in der festen Haut des Teeaufgusses entstanden sind. Solche festen Häute werden auch dadurch merklich, daß sie die Verdunstung der Flüssigkeit hindern; sie haben dadurch bei Mineralwässern warmer Quellen die Wirkung, deren Erkaltung in offenstehendem Gefäße auffallend lange zu verzögern.

Die Bruchfestigkeit solcher Häute ist (an Kobaltsalzlösungen) gemessen worden; ihre hiernach berechnete Dicke bei eben beginnendem festen Zusammenhang ist von der Größenordnung, die auch sonst bei dünnsten zusammenhängenden Schichten sich ergeben hat (10^{-6} mm, 248). Der Aufbau solcher Häute dürfte vermöge der die Moleküle parallel richtenden Kraft K kristallisch sein.

345. Oberflächenspannung und Temperatur. — Die Oberflächenspannung aller Flüssigkeiten nimmt mit steigender Temperatur ab (vgl. die Zahlen für Wasser in Tab. 10). Dies versteht sich aus den nach Maßgabe der Wärmeausdehnung zunehmenden Molekülabständen und den damit abnehmenden Kraftwirkungen der Moleküle. Die Abnahme der Oberflächenspannung geht bis zu Null, was bei der „kritischen Temperatur" der Flüssigkeit erreicht wird (bei Wasser z. B. 374° C). Die dann ihrer Oberflächenspannung beraubte Flüssigkeit kann keine Tropfen mehr bilden, auch überhaupt keine Grenzflächen gegen ihren Dampf mehr zeigen; sie hat aufgehört „tropfbare Flüssigkeit" zu sein und ist gänzlich in den Dampfzustand übergegangen, was auch in jeder Beziehung das besondere bei der kritischen Temperatur ist (vgl. W 239).

Mit der Oberflächenspannung ist auch deren Ursache, die Kraft K verschwunden, jedoch nicht der innere Druck P (317, 320), der nur verkleinert ist. Dies ist so zu verstehen, daß bei steigender Temperatur der Raum über der Flüssigkeit allmählich mehr mit deren Dampfe sich füllen muß, und je mehr Dampfmoleküle dort sind, desto mehr nach außen gerichtete Kräfte wirken auf die Flüssigkeitsmoleküle m an der Grenzfläche (317, Abb. 76), was schließlich die nach innen gerichtete Resultierende K der Molekularkräfte und damit auch die Oberflächenspannung α zu Null bringen muß. Gl. 342 wird dann ungültig, da bei ihrer Herleitung leerer Raum über der Flüssigkeit angenommen war.

Die Abnahme der Oberflächenspannung α mit steigender Temperatur wird an beweglichen Flüssigkeitsmassen leicht merklich. So gleitet z. B. ein in der Bunsenflamme geschmolzen gehaltener Salztropfen an horizontalem Platindraht stets aus der Flamme heraus, von warm nach kalt, weil ihn die größere

Oberflächenspannung seiner kälteren Seite hinauszieht. Umgekehrt muß die negative Oberflächenspannung β an der Grenze einer Flüssigkeit gegen eine von ihr vollkommen benetzte Wand (335) die Flüssigkeit stets in der Richtung von kalt nach warm der Wand entlang treiben; denn die negative Spannung bedeutet Dehnung der Grenzschicht, und diese Dehnung erfolgt — dem allgemeinen Temperatureinfluß auf die Molekularkräfte entsprechend — an der kalten Stelle mit der größeren Kraft. Dies dürfte die Ursache oder eine der Ursachen des verstärkten Hochsteigens der Säfte in den Pflanzen (339) im Frühling sein, wenn der Erdboden noch kalt, die oberen Teile der Pflanzen aber schon erwärmt sind. Im Herbst ist das Umgekehrte der Fall.

Gleichgewicht und Molekularkräfte bei Gasen (Aerostatik).

346. Gase streben immer nach Volumvergrößerung. — Was den Gaszustand wesentlich vom festen und flüssigen Zustand unterscheidet, ist die Unbestimmtheit nicht nur der Form, sondern auch des Volums. Eine gegebene Gasmenge hat nicht das Streben, ein bestimmtes Volum einzuhalten; es sind keine anziehenden Kräfte vorhanden, die sie zu bestimmter Raumerfüllung zusammenhalten würden — wie bei einem festen oder flüssigen Körper —; nur äußere Kräfte sind es, die je nach ihrer Größe der gegebenen Gasmenge ein bestimmtes Volum geben können. Ein Liter Wasser, von allen äußeren Kräften befreit, in den leeren Raum versetzt, bleibt ein Liter Wasser (sofern es nicht durch Verdampfung Gaszustand annimmt); 1 Liter Luft breitet sich sofort von selber über allen Raum aus, der zur Verfügung steht, und nur Kraftwirkungen von außen her können die Selbstverbreitung bis zu unendlich großer Verdünnung verhindern. Diese Grundeigenschaft aller Gase wurde — wie auch die anderen allgemeinen Eigenschaften des Gaszustandes — zuerst an der atmosphärischen Luft festgestellt, als die Luftpumpe es ermöglicht hatte, beliebig über gaserfüllten und gasfreien Raum zu verfügen (353, Guericke um 1645). Dabei wurde die Luft überhaupt erst zum greifbaren Gegenstand, wie es feste und flüssige Körper von vornherein waren.

Das Streben nach immer größerem Volum ist aber nicht etwa Folge abstoßender Molekularkräfte, sondern ist bloße Folge der Wärmebewegung der Moleküle; denn das Streben bleibt auch bei beliebig gesteigerter Verdünnung des Gases noch bestehen. Es sind also weder anziehende noch abstoßende Kräfte bei den Gasmolekülen merklich, was auch den durchschnittlich großen gegenseitigen Abständen der Moleküle im Gaszustand entspricht; nur bei sehr dichter Zusammenpressung, wobei das Gas der Verflüssigung sich nähert, zeigen sich solche Kräfte. Die Moleküle nicht zu dichter Gase bewegen sich daher (von der verhältnismäßig schwachen Schwerewirkung abgesehen) kräftefrei und daher in geraden Linien, wobei nur die Zusammenstöße der Moleküle untereinander oder mit Gefäßwänden die Richtung der geradlinigen Bewegung fortwährend abändern. Diese einfach geartete Molekularbewegung wurde in den Erscheinungen der Wärme sehr eingehend verfolgbar; sie ist daher sehr gut gesichert und ins einzelne gehend bekannt (W 35, 81 u. f.). Da alle Bewegungsrichtungen der Moleküle gleichmäßig vertreten sind, kann die Gasmasse als

Ganzes ruhen; sind aber keine Hindernisse vorhanden, so fahren alle Moleküle gradlinig auseinander und verbreiten sich so über allen Raum.

Molekularkräfte kommen demnach bei nicht zu dichten Gasen überhaupt nur bei den Zusammenstößen der Moleküle zur Wirkung, d. i. bei dichter Nachbarschaft. Dem entspricht es, daß — wie bemerkt — genügend zusammengepreßte Gase auch sonstige Zeichen geringer anziehender und auch abstoßender Molekularkräfte geben (s. 359 und W 242).

347. Gase wägbar. — Eine erste Frage, nach Feststellung der vollkommenen Unbestimmtheit des Volums, bezieht sich auf die äußere Begrenzung der Atmosphäre der Erde. Grenzt sie an den leeren Raum? Und, wenn so, wodurch wird sie verhindert von der Erde sich zu entfernen? Diese Fragen wurden durch Galilei, Torricelli und Guericke früh dahin beantwortet, daß die Luft durch ihr eigenes Gewicht an der Erde festgehalten ist, ganz wie es auch bei den flüssigen und festen Körpern auf der Erde der Fall ist. Danach war — besonders seit Erkenntnis der allgemeinen Gravitation — auch die ursprüngliche, den Himmelsraum betreffende Frage erledigt: Der Himmelsraum ist als luftfrei anzusehen, was im einzelnen noch näher zu betrachten sein wird (363, W 89).

Daß die Luft Gewicht hat, wurde schon von Galilei nachgewiesen, indem er die Gewichtszunahme eines Glasgefäßes, in das er Luft einpumpte, auf der Waage feststellte. Guericke konnte dann mit seiner Luftpumpe zuerst die Gewichte eines lufterfüllten und des leergepumpten Gefäßes vergleichen. Dies führte zu genauer Ermittelung des spezifischen Gewichts der Luft, so wie auch anderer Gase (s. Tab. 2). Wegen der Unbestimmtheit des Volums einer gegebenen Gasmenge kann das spezifische Gewicht (Gl. 70) bei Gasen am allerwenigsten eine bestimmte Bedeutung haben ohne Angabe der Umstände der Volummessung (Druck und Temperatur, s. Tab. 2), worauf wir zurückkommen (363).

348. Da die Gase den Mangel an Formelastizität (346) mit den Flüssigkeiten teilen, müssen auch alle als Folgen dieses Mangels bei den Flüssigkeiten erwiesenen Sätze (295—298) ebenso für die Gase gelten (348—354).

So vor allem der Satz, daß in einer ruhenden Gasmasse stets nur normale Kräfte vorhanden sind, keine tangentialen.

Ebenso gilt auch der Satz, daß ein von außen her auf ein Gas ausgeübter Druck bei Gleichgewicht durch das ganze Volum des Gases überall hin unvermindert und in allen Richtungen wirkend verbreitet ist.

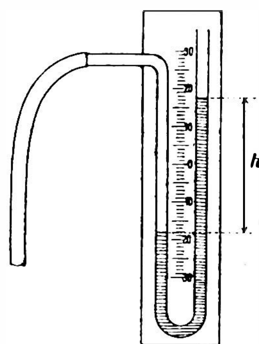


Abb. 87. Gasdruckmessung mit Flüssigkeitssäule.

349. Zur Messung von Drucken in Gasen dienen am einfachsten Flüssigkeitssäulen, die man an das Gas grenzen läßt (Abb. 87), so daß Gleichgewicht zwischen Gas- und Flüssigkeitsdruck wird. Ersterer ist dann durch letzteren gemessen und also nach Gl. 301 berechenbar. Es ist nach dieser Gleichung 1 cm Wasserdruck = 0·0010 Atm., 1 cm Quecksilberdruck = 0·0136 Atm. Drucksäulen dieser Flüssigkeiten werden dementsprechend oft als Maße für kleine Drucke benutzt[1]).

Außer diesen einfachen „Flüssigkeitsmanometern" werden auch Metallmanometer benutzt, wie an jedem Dampfkessel.

---

[1]) Vgl. dazu die dritte Fußnote zu 352.

Sie sind Federwaagen (256) für die Kraft des Druckes, den man einseitig auf elastisch verbiegbare feste Wände wirken läßt. Geeicht werden diese Manometer mittels Flüssigkeitssäulen oder — für sehr hohe Drucke — mittels Gewichten an Waagen ganz nach dem Gedanken von Abb. 71 (302).

350. Druck von Gassäulen. — Ferner muß wegen der Wirkung der Schwerkraft auf die Gase auch der Satz gelten (300, 301), daß im Inneren eines Gases ein von oben nach unten zunehmender Druck herrscht, wobei die Druckzunahme gegeben ist durch das Produkt des Höhenunterschiedes h mit dem spezifischen Gewicht s des Gases (Gl. 301).

Wegen der Kleinheit von s ergeben sich bei den Gasen nur geringe Druckstufen bei nicht sehr großen Höhenstufen. So ist für 1 m Höhenunterschied in gewöhnlicher Luft $hs = 100\,cm \cdot 0{\cdot}0013\,gr/cm^3 = 0{\cdot}13\,gr/cm^2 = 0{\cdot}00013$ Atm. $= 1{\cdot}3\,mm$ Wasser $= 0{\cdot}1\,mm$ Quecksilber. So kleine Druckunterschiede können in den meisten Fällen vernachlässigt werden. So wäre es z. B. bei den in Abb. 72 betrachteten Flüssigkeitssäulen zwar richtig zu bedenken, daß rechts eine Luftsäule H—h mitwirkt; aber selbst wenn diese 1 m Höhe hätte, würde dies die Quecksilbersäule h doch nur um 0·1 mm kleiner machen als in der Berechnung unter 306 angenommen.

351. Der Atmosphärendruck. — Jedoch, wir leben auf dem Boden eines Luftmeeres von jedenfalls sehr großer Gesamthöhe, und es ist daher unten immerhin ein erheblicher Druck zu erwarten. Dies war schon ungefähr Galileis Gedanke, und es waren auch schon früh Erscheinungen bekannt, die Folge eines solchen „Luftdrucks" sind. So das Stehenbleiben von Wassersäulen in umgedrehten, oben verschlossenen Gefäßen und das Aufsteigen von Wassersäulen in den Brunnenrohren unter der Wirkung der oben angebrachten Saugpumpen. Man hatte aber alle solche Erscheinungen aus der Annahme zu erklären gesucht, daß das Zustandekommen eines leeren Raumes — der in den gedachten Gefäßen oder oben im Brunnenrohr entstünde, wenn das Wasser diese Räume nicht füllte — von Natur aus unmöglich sei („horror vacui"). Als sich jedoch eines Tages bei einem sehr tiefen Brunnen gezeigt hatte, daß mit der besten Pumpe das Wasser nicht höher als 10 m kommt, konnten nur mehr wenig Zweifel darüber sein, daß nicht jene „Scheu vor dem leeren Raum", sondern ein bestimmter Druck vorliege, der von seiten der ganzen Atmosphäre auf die untere Wasserfläche ausgeübt wird und dessen Größe eben durch die 10 m Wassersäule gemessen wird. Torricelli erhob dies bald zur Gewißheit mit seiner Quecksilbersäule von rund 760 mm Höhe im Glasrohr (352), und Guericke vermochte mit seiner Luftpumpe (353) einwandfrei und eindrucksvoll den Druck der Luft ersichtlich zu machen und ihn in reinen Versuchen zu studieren. Er konnte ihn, einseitig gemacht, mit Gewichten messen, indem er ihn auf einen Kolben von gemessener Fläche in ausgepumptem Zylinder wirken ließ.

10 m Wasserdruck, 760 mm Quecksilberdruck oder rund 1 kgr/cm² geben nach diesen Erfahrungen den Druck an, welcher am Boden der Erdatmosphäre durch deren eigenes Gewicht herrscht. Es ist das ein ziemlich großer Druck, und er bleibt nur deshalb so oft unmerklich, weil er — wie Flüssigkeits- und Gasdruck überhaupt — allseitig ist und ebensosehr von unten nach oben als von oben nach unten wirkt (348). So konnte beispielsweise der Luftdruck bei den Betrachtungen über die Molekularkräfte in festen Körpern, über die Drucke von Flüssigkeits-

säulen, sowie über Oberflächenspannung mit Recht außer acht gelassen werden, und wo er ein wenig mitwirkt, kann dies nun leicht eingesehen und nachträglich mitberechnet werden.

Es ist nun auch offenbar, woher der Druck von 1 kgr/cm² den Namen „1 Atmosphäre" erhalten hat[1]) und weshalb er als sehr zweckmäßige Einheit für größere Drucke dient.

352. Barometer. — Torricellis Versuch (1643) bestand darin, ein etwa 1 m langes, einseitig verschlossenes Glasrohr mit Quecksilber vollständig zu füllen und, mit dem Finger ganz verschlossen, umgekehrt in eine Quecksilberwanne zu stellen, — ein damals nicht so leicht zugängliches Unternehmen. Die Säule im Rohr sank beim Wegziehen des Fingers sofort von selber auf die Höhe von etwa 760 mm herab, wo sie Gleichgewicht fand (Abb. 88a). Über der Säule war der leere Raum entstanden, dessen Herstellungsmöglichkeit damals so vielen Zweifeln unterworfen war.

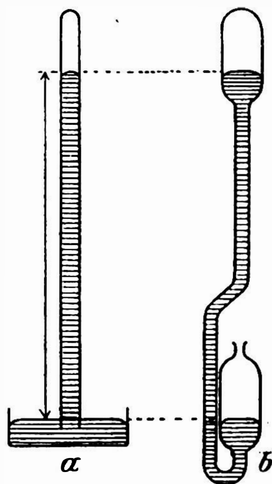


Abb. 88. Barometer.

Neigt man das Rohr, so daß keine Höhenstufe von 760 mm mehr in ihm Platz hat, so schlägt bei guter Luftfreiheit das Quecksilber heftig an das obere Rohrende[2]).

Torricelli stellte auch fest, daß der Luftdruck, gemessen an der Säule seines „Barometers", veränderlich ist, was durch Zustandsveränderlichkeit der über dem Orte befindlichen Luftsäule (Gewicht und Bewegungszustand) bedingt wird. Als „mittleren Barometerstand" in Meereshöhe hat man 760 mm Quecksilber von 0° [3]) willkürlich festgesetzt[4]).

Für den alltäglichen Gebrauch hat das Barometer verschiedene Formen angenommen. Abb. 88a zeigt das ursprüngliche „Gefäßbarometer", 88b das mit weniger Quecksilber auskommende „Heberbarometer". Wo die Quecksilberoberflächen sich befinden, muß das Rohr genügend weit sein, um merkliche Oberflächenspannungswirkung („Kapillarfehler") auszuschalten (339).

Metallbarometer („Aneroide") sind, wie alle solchen Druckmesser (349), Federwaagen (256). Es wirkt bei ihnen der Luftdruck auf eine elastische Wand, jenseits welcher leerer Raum sich befindet (Luft in diesem Raum würde Temperatureinfluß geben).

---

[1]) Genau versteht man unter 1 Atm. den Druck von 760 mm Quecksilber von 0°, was etwas mehr als 1 kgr/cm² ist (vgl. die drittfolgende Note).

[2]) Stets vorhandener Quecksilberdampf stört hierbei keineswegs, da er beim Zusammenpressen sofort zu flüssigem Quecksilber wird. Außerdem ist der Dampfdruck des Quecksilbers bei Zimmertemperatur äußerst klein (W, Tab. 32). Daß der vollständig leere (von Materie befreite) Raum wegen steten Verdampfens so gut wie aller Körper nur in (allerdings sehr weitgehender) Annäherung erreichbar sein kann, wurde bereits von Guericke ausdrücklich vermerkt.

[3]) Daß alle Flüssigkeitshöhen nur bei bestimmter Temperatur eindeutige Druckangaben bedeuten, ist selbstverständlich, da das für den Druck mit maßgebende spez. Gewicht der Flüssigkeit (Gl. 301) von der Temperatur abhängt. Beobachtete Quecksilbersäulen werden meist auf 0° umgerechnet („reduziert"), d. h. man berechnet (mittels Gl. 301 und der Kenntnis der spez. Gewichte des Quecksilbers bei verschiedenen Temperaturen) diejenige Quecksilberhöhe, welche beim gegebenen Drucke sich einstellen würde, wenn man das Barometer in schmelzendes Eis stellte.

[4]) 760 mm Quecksilber von 0° entsprechen genau nicht 1 kgr/cm², sondern 1·0333 kgr/cm² (Gl. 301). Doch werden wir für gewöhnlich 760 mm Quecksilber und 1 Atm. gleichsetzen.

353. Luftpumpen. — Guerickes Luftpumpe war ursprünglich eine Brunnen-Saugpumpe mit Zylinder und Kolben. Man kann ihre Ventile auch durch einen Hahn ersetzen, und man baut auch rotierende Luftpumpen („Kapselpumpen").

Auch das Barometer ist als Pumpe ausgebildet worden — „Quecksilberluftpumpe" —, indem der oberste Raum, in welchem die Leere zustande kommt, mit großem Querschnitt und also großem Volum versehen wurde, um bei jedem neuen Hub und dem nachfolgenden Senken des Quecksilbers möglichst viel Luft zu fördern. Auch die Quecksilberluftpumpe wurde rotierend gemacht.

Zur Erreichung höchster Luftverdünnungen pumpt man niemals mehr in die freie Luft hinaus, sondern in ein „Vorvakuum", das meist durch eine besondere Vorpumpe bedient wird. Es ist dadurch der Einfluß des „schädlichen Raumes" wesentlich vermindert. Es ist das der nie ganz vermeidbare Raum in der Pumpe (zwischen Kolben und Zylinderboden oder zwischen Quecksilber und Gefäßwand), welcher mit Luft vom Drucke des Vorvakuums (bzw. ohne dieses der freien Luft) gefüllt bleibt, so oft ein neuer Pumpenzug beginnt. Diese Luftfüllung des schädlichen Raumes bleibt dann immer wieder im auszupumpenden Raum zurück, was der Pumpenwirkung eine Grenze setzt. Man sieht ein, daß diese Grenze durch den Luftdruck gegeben ist, welcher in der Pumpe selbst entsteht, wenn die Luftfüllung des schädlichen Raumes in das leer gedachte Fördervolum der Pumpe sich verbreitet. Die erreichbare Annäherung an das vollständige „Vakuum" wird also umso besser sein, je kleiner der schädliche Raum im Verhältnis zum Fördervolum ist und je besser er selber schon vorgepumpt ist. Durch Anwendung der Vorpumpe wird auch die für Quecksilberluftpumpen sonst erforderliche volle Barometerhöhe sehr verringert, wodurch die vorteilhafte rotierende Einrichtung erst möglich wurde.

Andere Luftpumpenarten sind später zu kennzeichnen (367, 408).

Das Arbeiten aller Luftpumpen beruht ganz auf dem Streben jedes Gases, möglichst über allen Raum sich zu verbreiten und erweist unmittelbar dieses Streben; denn nur hierdurch geht ganz von selber immer wieder Luft aus dem auszupumpenden Raum in die Pumpe über, um dort gefangen und weggeschafft zu werden.

354. Auch der Satz vom Auftrieb (307) gilt für Gase wie für Flüssigkeiten: Jeder in ein Gas versenkte Körper verliert so viel von seinem Gewicht als die von ihm verdrängte Gasmenge wiegt.

Hierauf beruhen die Luftballone und die Luftschiffe. Da 1 Kubikmeter Luft 1·29 kgr wiegt, wird jeder Körper aufsteigen, der je Kubikmeter weniger als dies wiegt. Es kommt also darauf an, der zu hebenden Last einen genügend großen, luftverdrängenden Raum von möglichst geringem Eigengewicht zuzufügen. Meist wird dazu die Ballonfüllung mit Wasserstoff benutzt, der nur 0·09 kgr/m³ wiegt. Leerer Raum im Ballon wäre besser als Wasserstoff, weil er noch weniger wiegen würde; jedoch für die dann gegen den Luftdruck erforderliche Versteifung der Hülle ist jeder bekannte feste Körper zu schwer. Die Gasfüllung, mit ihrem Streben über allen Raum sich zu dehnen, ist das leichteste Versteifungsmittel.

Der Luftauftrieb kommt auch bei allen Wägungen in Luft in Betracht; man muß dieselben auf den leeren Raum umrechnen („reduzieren"), was mittels des bekannten spezifischen Gewichts der Luft geschieht. Ein Literkolben beispielsweise, mit der Waage auf Volumrichtigkeit geprüft (14), sollte (bei 4° C) 1 kgr Wasser fassen. In Luft würde sich jedoch um 1·29 gr weniger ergeben müssen; denn so viel beträgt der Luftauftrieb für 1 l. Genauest zu nehmende Gewichtssätze sind auf Richtigkeit im leeren Raum eingerichtet; doch macht der Auftriebsfehler stets umso weniger aus, je höher das spezifische Gewicht des auf die Waage zu bringenden Stoffes ist.

Volum und Druck bei Gasen.

355. Wahrer, voller Gasdruck. — Nach Kenntnis des stets vorhandenen Luftdrucks in der freien Atmosphäre ist es klar, daß die gewöhnlichen Druckzeiger oder Druckmesser (Manometer, 349) nicht volle, nicht wahre Drucke angeben, sondern nur Überdrucke gegen die Atmosphäre; denn sie messen

die Drucke durch Gleichgewicht mit einem entgegengesetzten Druck, der als Summand meist auch den Atmosphärendruck enthält. Im Flüssigkeitsmanometer z. B. (Abb. 87) drückt die Atmosphäre durchs offene Rohrende zusammen mit der Flüssigkeitssäule, und entsprechend ist es auch bei den Metallmanometern, deren verbiegbare Wände an die freie Luft grenzen. Die bezifferte Skaleneinteilung solcher Druckmesser zeigt dementsprechend den Druck Null an, wenn es bloß Atmosphärendruck ist; steht der Druckzeiger eines Dampfkessels auf 10 Atm., so sind in Wirklichkeit 11 Atm. Druck im Kessel. Solche Druckbemessung entspricht allerdings den gewöhnlichen Zwecken; denn nur der Überdruck gegen Atmosphäre ist für gewöhnlich nutzbar. Will man aber Gasdrucke nach Ursache und Wirkung überlegen, so müssen es volle, wahre Drucke sein, und es muß also der Luftdruck immer berücksichtigt sein.

356. Gesetz von Boyle und Mariotte. — Die Kenntnis wahrer Drucke zeigt sich im besonderen nötig, wenn man nach dem Gesetz frägt, welches Volume und Drucke einer gegebenen Gasmenge verbindet.

Daß ein solches Gesetz bestehen muß, ist schon daraus klar, daß ein Gas überhaupt nur dann ein bestimmtes Volum einnimmt, wenn es durch einen bestimmten äußeren Druck zusammengehalten wird, der dem vom Gase selbst ausgeübten Druck, seinem Streben nach steter Volumvergrößerung (d. i. seiner Molekularbewegung) entstammend, das Gleichgewicht hält. Verringert man den äußeren Druck, so dehnt sich das Gas, und es stellt sich ein größeres Volum mit Gleichgewicht ein. Es sind einfache, schon mit Zylinder und leicht beweglichem Kolben zu machende Erfahrungen, die zeigen, daß eine unter dem Kolben abgesperrte Gasmenge bei jedem Druck, den man auf den Kolben wirken läßt, ein bestimmtes Volum annimmt, und daß dies Volum um so größer ist, je kleiner der Druck, und um so kleiner, je größer der Druck. Das einfachste Mögliche für einen genauen Ausdruck solchen Verhaltens ist offenbar: „Volum und Druck sind einander verkehrt proportional", und dies Einfachste durfte auch als richtig erwartet werden, wenn die Auffassungsweise des Verhaltens — daß gegebener äußerer Druck Ursache, Volum Wirkung sei — richtig ist.

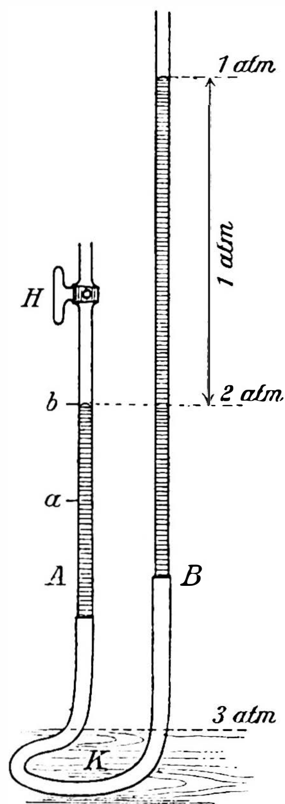


Abb. 89.
Gas unter 2 Atm. Druck.

So weit war schon durch Guericke zu sehen. Boyle und später Mariotte (1660 und 1676) führten Versuche aus, um dies zu prüfen. Die verschiedenen, meßbaren Drucke brachten sie durch Quecksilbersäulen in Glasröhren hervor. Ist in Abb. 89 der Hahn H offen, so ist beiderseits über dem Quecksilber in den miteinander verbundenen Rohrschenkeln der gleiche Druck der Atmosphäre vorhanden, und es steht infolgedessen das Quecksilber beiderseits gleich hoch. Es sei dieser Quecksilberstand auf die Höhe von a gebracht, und es werde dann der Hahn H geschlossen. Es ist dann das Luft-

volum H a mit 1 Atm. Druck abgeschlossen. Wird nun in B Quecksilber zugegossen, oder wird das Rohr B gehoben (was der Kautschukschlauch K ermöglicht), so kommt das Quecksilber in diesem Rohr höher zu stehen als in A; gleichzeitig wird aber auch das eingeschlossene Luftvolum kleiner. Hat man — wie es die Abbildung zeigt — das Quecksilber in B um 760 mm höher gebracht als in A, so steht die abgeschlossene Luft unter dem Druck von 2 Atm., nämlich unter dem Druck der überstehenden Quecksilbersäule, der 1 Atm. beträgt, und dem außerdem oben noch auf diese Säule lastenden Atmosphärendruck, der ebenfalls 1 Atm. ist, zusammen also 2 Atm. Unter diesem Druck zeigt sich das nun durch die Länge H b bemessene Volum der abgeschlossenen Luft, verglichen mit dem früheren Volum H a, halbiert. Verdoppelung des Drucks hat also das Volum halbiert; Verdreifachung des Druckes bringt es auf $^1/_3$ usw. Damit ist Boyles und Mariottes Gesetz von der verkehrten Proportionalität der Volume und Drucke der Gase wenigstens für Druck zwischen 1 Atm. und einigen Atmosphären und für Luft erwiesen. Es verhalten sich aber hierin alle Gase gleich, sofern sie der Verflüssigung nicht zu nahe kommen.

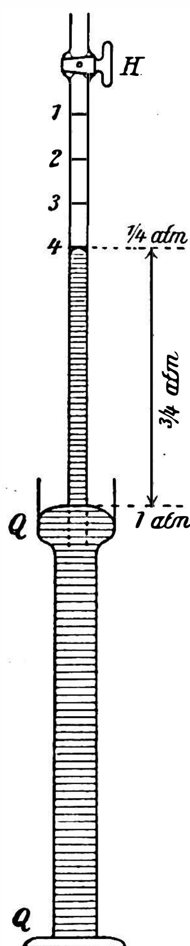


Abb. 90. Gas unter $^1/_4$ Atm. Druck.

Leicht ist das Gesetz auch bei Drucken unter 1 Atm. zu prüfen. Man nehme das unten offene, oben mit dem Hahn H versehene Glasrohr Abb. 90, und versenke es mit offenem Hahn in das hohe Quecksilbergefäß QQ, so daß die Marke 1 an die Quecksilberoberfläche Q zu stehen kommt; es steht dann das Quecksilber im Rohre auch bei 1. Schließt man nun den Hahn, so hat man das Luftvolum H1 bei 1 Atm. Druck abgesperrt. Jetzt kann man das Rohr beliebig heben, wobei in ihm stets eine Quecksilbersäule von gewisser Höhe mitgehoben wird, die zusammen mit dem äußeren Atmosphärendruck den Druck am oberen Ende dieser Säule und damit auch den Druck der angrenzenden, eingeschlossenen Luft bestimmt, und man kann zusehen, welche verschiedenen Volume diese Luft bei den so erreichbaren verschiedenen Drucken annimmt. Beispielsweise ist in der Abbildung die mitgehobene Säule Q4 $^3/_4$ Atm. hoch; es ist dann die Luft unter dem Druck 1 Atm. — $^3/_4$ Atm. = $^1/_4$ Atm., und es ist dabei ihr Volum H4 4mal so groß als es bei 1 Atm. Druck war. Es zeigt sich so wieder die verkehrte Proportionalität von Volum und Druck.

357. Andere Form des Gesetzes. — In der Anwendung des Gesetzes von Boyle und Mariotte hat man stets eine ungeändert bleibende Gasmenge (bei ungeändert bleibender Temperatur) bei zwei (oder mehreren) verschiedenen Drucken zu vergleichen. Ist dann beim Drucke p_1 das Volum V_1 und beim Drucke p_2 V_2, so ist nach der verkehrten Proportionalität $V_1 : V_2 = p_2 : p_1$, oder auch $V_1 p_1 = V_2 p_2$. Die letztere Form der Gleichung paßt unmittelbar auf beliebig viele Drucke p und zugehörige Volume V, wenn man schreibt

$$Vp = \text{Konst.}, \qquad 357)$$

und dies ist der kürzeste Ausdruck für Boyles und Mariottes Gesetz: die **Konstanz des Produktes aus Volum V und Druck p.** Sie gilt solange als die Gasmenge (und die Temperatur) ungeändert bleibt. Der Zahlenwert der Konstanten muß jedesmal aus einem bekannten Wert von V bei bekanntem p für die betreffende Gasmenge (und Temperatur) als Vp berechnet werden.

358. Ein Beispiel der Anwendung des Gesetzes ist die Umrechnung eines unter beliebigem, zufälligem Druck gemessenen Gasvolums auf den mittleren Barometerdruck von 760 mm Quecksilber. Es sei (Abb. 91) das Volum V gemessen, abgesperrt über einer Quecksilbersäule, die h mm hoch über der unteren Oberfläche des Quecksilbers hervorsteht; der Barometerstand sei B mm. Der Druck des Gases ist dann $p = B - h$. Das gesuchte, auf 760 mm Druck „reduzierte" Volum V_0 ergibt sich dann aus der Gleichung $V_0 \cdot 760 = V(B - h)$.

Auf die Mitberücksichtigung der bei Gasvolumen mitbestimmenden Temperatur gehen wir in der Wärmelehre ein (W 40).

359. Gültigkeitsgrenze. — Das Gesetz ist ursprünglich bei kleinen und mittleren Drucken gefunden und weiter geprüft worden. In diesem Druckbereich gilt es für alle von der Verflüssigung genügend weit entfernten Gase so gut als man leicht Drucke und Volume messen kann. Wendet man aber sehr hohe Drucke an, so treten Abweichungen ein, auch ohne daß man der Verflüssigung nahe käme.

Die Gültigkeit bis zu beliebig niedrigen Drucken, sowie aber auch das Ungültigwerden bei höchsten Drucken ist verständlich, wenn man die Grenzfälle $p = 0$ und $p = \infty$ nach Gl. 357 überlegt. Ist $p = 0$, so gibt die Gleichung $V = \infty$, und dies stimmt überein mit der allgemeinen, gut gesicherten Erkenntnis, daß jedes Gas ohne Druck über allen Raum sich verbreitet.

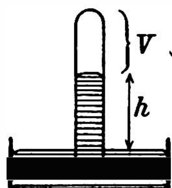


Abb. 91. Reduktion eines Gasvolums auf Normal-Zustand.

Ist dagegen $p = \infty$, so gibt die Gl. 357 $V = 0$, und dies ist nicht als richtig zu erwarten, da dem Verschwinden des Gesamtvolums einer gegebenen Gasmenge die gegenseitige Undurchdringlichkeit der Moleküle entgegensteht. Verschwinden können bei höchsten Drucken nur die Zwischenräume der Moleküle, soweit dichteste Aneinanderlagerung derselben das gestattet; das Eigenvolum der Moleküle oder ein gewisses kleines Vielfaches davon ist dagegen als übrigbleibend zu erwarten. Dem entspricht auch die Beobachtung, daß bei höchsten Drucken die Gasvolume größer gefunden werden als nach Boyles und Mariottes Gesetz.

Es zeigte sich aber außerdem eine zweite, entgegengesetzte Abweichung von diesem Gesetz bei weniger hohen Drucken: es werden hier die Volume kleiner gefunden als nach dem Gesetz; erst bei den allerhöchsten Drucken werden sie größer. Diese entgegengesetzte Abweichung bei den mittleren Drucken erklärt sich einwandfrei aus dem merklichen Mitwirken der anziehenden Kräfte der Moleküle, soweit diese durch die mit dem hohen Druck verbundene Volumverkleinerung einander sehr nahe kommen. Es kommt dann zum äußeren Druck noch der innere Druck der Molekularkräfte hinzu, derselbe Druck, der im flüssigen Zustande mit den Erscheinungen der Oberflächenspannung verbunden ist (320, 341); daher wird das Volum kleiner als es nach Boyles und Mariottes Gesetz, das nur den äußeren Druck berücksichtigt, berechnet würde.

Die in der Wärmelehre zu behandelnde, die Bewegungen der Moleküle

verfolgende kinetische Gastheorie (W 81 u. f.) zeigt, daß Boyles und Mariottes Gesetz mit der Voraussetzung verbunden ist, daß die Moleküle nur während der kurzen Zeiten ihrer Zusammenstöße aufeinander wirken. Die Mitberücksichtigung der bei durchschnittlich großer Nähe der Moleküle merklich werdenden anziehenden Kräfte (248) und der bei noch dichterer Zusammendrängung überwiegenden abstoßenden Kräfte der Undurchdringlichkeit der Moleküle (249) ergibt die Abweichungen.

360. Gleichung von van der Waals. — Diese beiden Abweichungen sind von van der Waals (1873) in der Gleichung zusammengefaßt worden:

$$(V - b)\ (p + \frac{a}{V^2}) = \text{Konst.}, \tag{360}$$

welche als Erweiterung des Gesetzes von Boyle und Mariotte (Gl. 357) angesehen werden kann. Es bedeutet dabei b das von den Molekülen selbst beanspruchte Volum, und a bemißt den inneren Druck, dessen Größe verkehrt proportional dem Quadrat des Volums V angenommen wird, so daß dieser Druck $P = a/V^2$ wird.

Man sieht bei Vergleichung mit $Vp =$ Konst. (Gl. 357), daß in van der Waals Gleichung anstelle des ganzen Volums V das Volum des zur Verringerung freien Raumes, $V - b$, getreten ist und anstelle des äußeren Druckes p der Gesamtdruck $p + P = p + a/V^2$, alles wie es sinnvoll auch erwartet werden kann (359).

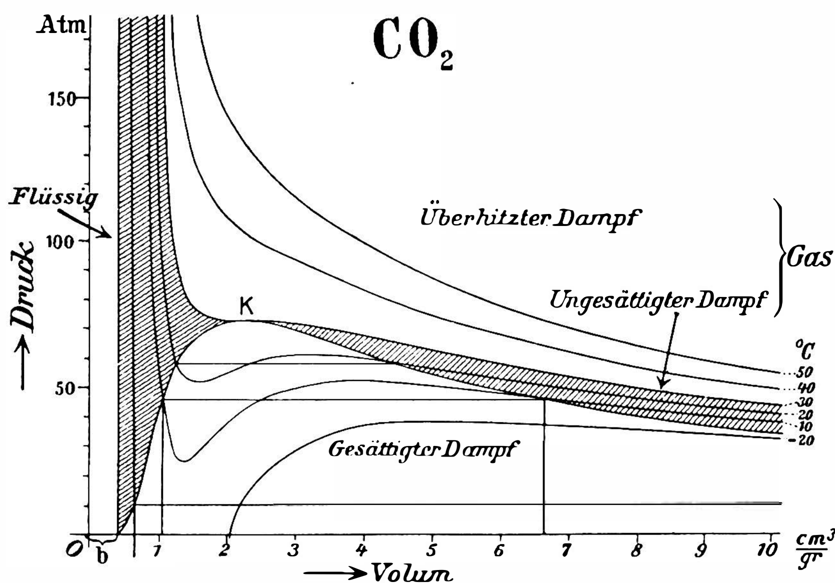


Abb. 92. Kohlensäure nach van der Waals.

Die Gleichung van der Waals entspricht vortrefflich der Wirklichkeit. Daß einige kleine Abweichungen, bei den einzelnen Gasen von verschiedener Größe, übrig bleiben, ist nicht zu verwundern, wenn man bedenkt, daß der innere Druck, für welchen sehr einfach $P = a/V^2$ angenommen ist, ganz von den Molekularkräften abhängt, deren Verhalten nicht einfach ist. Die beiden Konstanten a und b, welche auf eine bestimmte Gasmenge zu beziehen sind (z. B. auf 1 gr), müssen für jedes Gas nach besonderen Druck- und Volummessungen mittels der Gl. 360 selbst berechnet werden. Dieselbe gibt aber dann das Gesamtverhalten des Gases und sogar auch sein Verhalten bei der Verflüssigung gut wieder, worauf in der Wärmelehre zurückzukommen ist (W 39 und 213). Sogar die Kompressibilität der Flüssigkeit (312) kann gut angenähert aus der Gl. 360 berechnet werden. Auch die aus der Konstanten b zu berechnenden Moleküldurch-

messer stimmen gut mit den anderweitigen Ermittelungen (Tab. 1) überein, wenn man b gleich dem 4-fachen Eigenvolum der Moleküle setzt und diese als Kugeln betrachtet. Dabei ist zu bemerken, daß b von vornherein als kleines Vielfaches dieses Eigenvolums zu denken ist, weil die Moleküle schon wegen ihrer Wärmebewegung auch bei höchsten Drucken nicht lückenlos aneinander schließen können. Wir konnten nach diesen Bewährungen mit Vertrauen auch den inneren Druck P der Flüssigkeit dieser Gleichung entnehmen (341).

In Liniendarstellung zeigt Abb. 92 den Zusammenhang von Volum und Druck für Kohlensäure, wobei hier nur die für die Temperaturen 50° C, 40° C bis zu 30° C (s. den rechten Rand der Abbildung) gezeichneten Linien zu betrachten sind. (Die übrigen Linien beziehen sich auf die Verflüssigung; siehe Wärmelehre). Es ist das Volum V als Abszisse, der zugehörige Druck p als Ordinate genommen. Gälte Boyles und Mariottes Gesetz genau, so müßten diese Linien gleichseitige Hyperbeln sein mit den beiden Koordinatenachsen als Asymptoten und der Hyperbelachse unter 45° zu diesen; denn $Vp =$ Konst. ist bei der getroffenen Koordinatenwahl eben die Gleichung solcher Hyperbeln. Man sieht auch, daß die Linien der Abbildung von rechts her, d. i. bei den großen Volumen beginnend, ansteigen wie Hyperbeln. Jedoch im weiteren Anstieg nach links hin, bei abnehmendem Volum und steigendem Druck, zeigen sie Verbiegungen im Vergleich mit Hyperbeln. Sie laufen alsbald stark verflacht und dann zuletzt umso steiler; dies sind die genannten Abweichungen von Boyles und Mariottes Gesetz. Dieselben steigern sich umso mehr, je tiefer die Temperatur ist, zu welcher die Linie gehört, d. h. je mehr man sich der flüssigen Kohlensäure nähert. Ganz an die Ordinatenachse, d. i. an die Linie $V = 0$ kommt keine der Linien heran; sie haben nicht diese Achse zur Asymptote, wie es den gleichseitigen Hyperbeln zugehörte, sondern die um b davon abstehende Linie $V = b$, entsprechend dem Eigenvolum der Moleküle.

361. Boyles und Mariottes Gesetz genügend, wenn das Gas genügend fern der Verflüssigung ist. — Ist das Gas genügend verdünnt, V also groß und p klein, so geht van der Waals Gleichung in unmittelbar ersichtlicher Weise in Boyles und Mariottes Gesetz über; denn es verschwindet dann b neben dem großen V, und a/V^2 wird klein und verschwindet neben p, so daß $pV =$ Konst. übrigbleibt. Das Bereich solcher sehr angenäherter Gültigkeit des Gesetzes von Boyle und Mariotte, wie z. B. auch für die Kohlensäure bei Zimmertemperatur, liegt in Abb. 92 rechts außerhalb des Zeichnungsrahmens; dort laufen sämtliche gezeichneten Linien gut hyperbolisch.

Man kommt für alle Volum- und Druckrechnungen mit Gasen in der Hauptsache vollkommen mit Boyles und Mariottes Gesetz aus, solange nicht etwa die Dichte des Gases der der Flüssigkeit nahekommt.

362. Kompressibilität der Gase. — Will man Gase in bezug auf Kompressibilität mit Flüssigkeiten vergleichen, so ist die — wie für Flüssigkeiten und feste Körper definierte — Kompressibilität (267, 312) der Gase nach Boyles und Mariottes Gesetz zu berechnen. Man findet so[1]) die Kompressibilität gleich dem reziproken Druck, geltend gleichmäßig für alle Gase. Es sinkt daher die Kompressibilität mit steigendem Druck, ein Verhalten, das übrigens auch bei festen und flüssigen Körpern in gewissem Maße sich zeigte (267, 314). Zahlenmäßig ist danach die Kompressibilität von Gasen bei 1 Atm. Druck rund 10000 mal so groß als die des Alkohols (Tab. 8).

363. Druckverteilung in der Erdatmosphäre. — Wir hatten bereits nach der für Drucke von Flüssigkeitssäulen geltenden Gl. 301 berechnet, daß ein Höhenunterschied von 1 m im Luftmeere der Erde einen Druckunterschied von rund 0·1 mm Quecksilber ergibt (350). Dabei wurde das spezifische Gewicht der Luft, wie es am Erdboden, bei 1 Atm. Druck gilt, zur Rechnung benutzt. Danach

[1]) Die Rechnung ist im Anhang zur Akustik VI zu finden.

würden beim Aufsteigen um 7600 m alle 760 mm der Barometersäule verschwunden sein, und man wäre an der oberen Grenze der Atmosphäre. Jedoch, es ist nicht richtig — schon Guericke bemerkte es —, mit demselben spezifischen Gewicht der Luft bis in beliebige Höhen zu rechnen; denn mit jeder Druckänderung beim Aufsteigen ändert sich auch das spezifische Gewicht. Da spez. Gewicht = Gewicht/Volum, und da mit dem Druck das Volum der gegebenen Gewichtsmenge nach Boyles und Mariottes Gesetz sich ändert, so muß das spezifische Gewicht jedes beliebigen Gases proportional dem Druck sich ändern, wonach man leicht spezifische Gewichte von Gasen von einem Druck auf einen anderen umrechnet.

Man muß daher mit jeder einzelnen Höhenstufe der Atmosphäre besonders rechnen und für jede derselben das spezifische Gewicht entsprechend bereits errechnetem Drucke einsetzen. Dies hat zuerst Mariotte ausgeführt. Seit Newton und Leibniz erfolgt solche Rechnung sehr vereinfacht und zugleich mit beliebiger Genauigkeit, nämlich in unendlich kleinen Höhenstufen, mittels der Infinitesimalrechnung[1]).

Man findet, daß in rund 5000 m Höhe (d. i. ein wenig über den Alpengipfeln) der Druck auf ½ Atm. gesunken ist und daß bei beliebigem Aufsteigen um gleiche Höhenstufen (in „arithmetischer Reihe" der Höhen) der Druck stets um gleiche Bruchteile (nach „geometrischer Reihe") abnimmt. Es beträgt also (in runden Zahlen) der Druck in 0 km Höhe 1 Atm., in 5 km ½ Atm., in 10 km ¼ Atm., in 15 km $^1/_8$ Atm., in 20 km $^1/_{16}$ Atm. usw.[2]). Man sieht, daß hiernach erst in unendlich großer Höhe der Druck Null, d. i. vollständige Luftleere erreicht würde.

In der Tat zeigen Dämmerungserscheinungen noch in 70 km Höhe in der Luft schwebende, lichtzerstreuende Teilchen an; Sternschnuppen wurden bis zu 240 km Höhe aufleuchtend gefunden, was ohne Luftwiderstand nicht möglich wäre, und Nordlicht — von magnetisch ablenkbaren Strahlen der Sonne leuchtend gemachte Luft — wurde bis in Höhen von 500 km beobachtet. Allerdings berechnet man in solcher Höhe Gasverdünnungen, wie sie die besten Luftpumpen kaum erreichen lassen, und nur die große räumliche Ausdehnung dieser Atmosphärenreste kann das Leuchten noch merklich werden lassen, das ihr Vorhandensein verrät. Die in noch größeren Höhen zu erwartenden Luftreste müssen noch geringer sein. Es kommt daher für den Übergang in die Luftleere des Himmelsraums kaum weiter in Betracht, daß am Äquator jedenfalls über 37 000 km Höhe (rund 6facher Erdradius) keine Luft mehr festgehalten sein könnte, weil dort Fliehkraft und Gravitation bereits einander gleich sind, und man sieht auch ein, daß die Erde die jetzt auf ihr befindlichen Luftmengen gut festhält (siehe dazu W 89).

Tatsächlich mit dem Barometer untersucht wurde die Druckabnahme schon bald nach Torricelli auf Bergen und Türmen von bekannter Höhe (Pascal 1648). Jetzt ist umgekehrt das Barometer das beste Mittel zu schneller Messung nicht allzu geringer Höhen, besonders für die Luftfahrt. Für sehr große Höhen,

---

[1]) Siehe die Rechnung im Anhang III.

[2]) In solcher Reihe erfolgt auch, wie leicht einzusehen, die Druckabnahme beim Auspumpen eines Raumes mit der Luftpumpe nach jeweils einer gleichen Zahl von Pumpenzügen.

wobei die Temperatur der darunter liegenden Luftsäule nicht angenähert als einheitlich genommen werden kann, müßte auch die Abhängigkeit des spezifischen Gewichtes der Luft von der Temperatur berücksichtigt werden, und zu bedenken ist immer, daß die Rechnung ruhende Luft voraussetzt.

Bewegungserscheinungen in Flüssigkeiten und Gasen (Hydrodynamik und Aerodynamik).

364. Von hier ab können wir Flüssigkeiten und Gase gemeinsam behandeln, weil für das Besondere ihrer Bewegungserscheinungen das den beiden Zuständen gemeinsame Fehlen von Formelastizität (294) maßgebend ist.

Diffusion.

365. Eine Bewegungserscheinung in ruhenden Flüssigkeiten und Gasen. — Vorerst ist eine Bewegungserscheinung zu betrachten, die in Flüssigkeiten und Gasen selbsttätig auftritt, ohne daß äußere Kräfte wirken: die Diffusion. Sie ist ein Sichtbarwerden der sonst verborgenen, immer vorhandenen Wärmebewegung der Moleküle (316, 346, W 107). Es sind dabei nicht Raumelemente der Flüssigkeit oder des Gases in Bewegung, sondern die Moleküle einzeln. Daher kann die Diffusion als eine Bewegungserscheinung ruhender Flüssigkeiten und Gase bezeichnet werden; sie stört nicht die Gültigkeit der Sätze der Hydrostatik und Aerostatik, bei welchen die Wärmebewegung in der Tat auch schon in Betracht gezogen ist. Dagegen kann sie als eine niemals fehlende Begleiterscheinung aller Flüssigkeits- und Gasbewegungen diese gelegentlich beeinflussen (vgl. 386 und 411).

366. Freie Diffusion. — Schichtet man zwei verschiedene Flüssigkeiten übereinander, die schwerere unten falls sie von ungleichem spezifischem Gewicht sind, so kann (abgesehen vom Falle chemischer Einwirkung mit molekularer Umsetzung) zweierlei eintreten. Entweder sie bilden eine scharfe Grenzfläche mit Oberflächenspannung gegeneinander — so z. B. Öl und Wasser —, oder ihre gegenseitige Abgrenzung ist verwaschen, wie z B. bei Alkohol und Wasser. Welcher der beiden Fälle eintritt, dies hängt ganz von den Molekularkräften der beiden Flüssigkeiten ab. Im ersten Fall haben die beiden Flüssigkeiten geringe gegenseitige Molekularkräfte; sie trennen sich daher durch ihre überwiegenden eigenen Molekularkräfte voneinander, die auch die (positive, meist aber sehr geringe) Oberflächenspannung der Grenzfläche bedingen, wie es den schon erörterten Überlegungen über die Kraft K (Abb. 76) entspricht (318, 333). Die Flüssigkeiten sind dann nicht mischbar. Im zweiten Fall werden gegenseitige Molekularkräfte merklich oder sie sind sogar überwiegend; die beiden Flüssigkeiten sind dann in jedem Verhältnis miteinander mischbar, wobei große gegenseitige Molekularkräfte auch durch entsprechende Volumverminderung beim Mischen sich äußern, wie bei Alkohol und Wasser (29). Nur der Fall der Mischbarkeit ist hier weiter zu betrachten.

Die Diffusion besteht darin, daß die Mischung aneinander grenzender mischbarer Flüssigkeiten allmählich ganz von selber eintritt. Die untere Flüssigkeit

kriecht langsam in die obere, die obere in die untere, und nach genügend langer Zeit sind sie selbsttätig so gut wie gleichmäßig über ihr gemeinsames Volum verteilt. Man sieht das unmittelbar, wenn eine der beiden Flüssigkeiten gefärbt ist, z. B. wenn Wasser über Kupfervitriollösung geschichtet war.

Bei Gasen, die sämtlich in allen Verhältnissen mischbar sind, weil sie überhaupt keine merklichen Molekularkräfte zeigen (346), tritt dieselbe Erscheinung der Diffusion ein; man kann sie z. B. bei Luft über (tiefgelbem) Bromdampf mit dem Auge gut verfolgen.

Die Diffusion ist bei Gasen wesentlich schneller als bei Flüssigkeiten. Es kommt dies von den viel größeren Molekülabständen bei den Gasen; denn die Erscheinung besteht tatsächlich darin, daß die in der fortdauernden Wärmebewegung begriffenen Moleküle des einen Stoffes in die Zwischenräume der Moleküle des anderen Stoffes hineinwandern, was bei Flüssigkeiten und Gasen ungehindert möglich ist, da deren Moleküle an keine festen Gleichgewichtslagen gebunden sind (315). Das Wandern wird nur durch die fortwährenden gegenseitigen Zusammenstöße der Moleküle in seiner Geschwindigkeit beschränkt.

Auch in einheitlicher Flüssigkeit geht ohne Zweifel fortdauernde Diffusion vor sich; kein Molekül bleibt dauernd an seiner Stelle. Ebenso sind die Gase der atmosphärischen Luft in fortdauernder gegenseitiger Diffusion begriffen.

Die Diffusion zeigt in besonderer Weise das Streben der Verbreitung über allen Raum (346) infolge der Wärmebewegung der Moleküle. Die Moleküle des einen Gases verbreiten sich über den freien Raum zwischen den Molekülen des anderen, benachbarten Gases. Ebenso ist es bei den Flüssigkeitsmolekülen, deren Wärmebewegung nicht wesentlich anders ist als die der Gasmoleküle, was allein schon durch die Gültigkeit von van der Waals Gleichung über die Verflüssigung hinaus (360) angezeigt ist. Der Unterschied zwischen Gas und Flüssigkeit ist hierbei nur der, daß die Flüssigkeiten freie Oberflächen mit Oberflächenspannung bilden, an welchen die nach außen sich bewegenden Flüssigkeitsmoleküle durch die Kraft K (318, Abb. 76) von der Weiterverbreitung zurückgehalten werden, während bei den Gasen — ebenso aber auch an den Grenzflächen gegenseitig mischbarer Flüssigkeiten — keine solche Kraft vorhanden ist.

Immer strebt die Diffusion nach Ausgleichung vorhandener Dichtigkeits- (Konzentrations-) Unterschiede innerhalb des den Molekülen zugänglichen Raumes.

Mit steigender Temperatur steigt alle Diffusionsgeschwindigkeit, weil dann die Geschwindigkeiten der Wärmebewegung steigen.

Da bei gleicher Temperatur die Wärmebewegung um so schneller ist, je kleiner die Masse der Moleküle (W 81 u. f.), so ist die Diffusion unter sonst gleichen Umständen bei Stoffen mit kleinem Molekulargewicht besonders schnell. Am schnellsten diffundiert Wasserstoffgas.

367. Diffusion durch Spalten und Poren. — Um nicht durch Strömungen in den Gasen und Flüssigkeiten gestört zu sein, kann man die Diffusion durch enge Spalten oder durch poröse Wände beobachten, z. B. durch eine Zelle aus gebranntem (unglasiertem) Ton. Läßt man den Hohlraum einer solchen Tonzelle T (Abb. 93) in eine nach unten gekehrte Glasröhe R sich fortsetzen, die in ein Gefäß mit Wasser W taucht, so daß der Hohlraum durch das Wasser abgeschlossen ist, und stülpt man über die Zelle eine Glocke G, in welche

Wasserstoffgas oder (wasserstoffreiches) Leuchtgas einströmt, so beginnt sofort die Diffusion des Wasserstoffes in die Zelle hinein und gleichzeitig Diffusion der in der Zelle befindlichen Luft aus ihr heraus. Da aber erstere Diffusion schneller ist, überwiegt sie, und es entsteht in der Zelle ein Überdruck, was man an dem Herausgluckern der Luft unten durch das Wasser merkt. Der Überdruck ist rein durch die Diffusion entstanden; ein äußerer Überdruck treibt den Wasserstoff nicht hinein, da doch die Glocke G nach unten breit offen ist. Nach einiger Zeit hört das Gluckern auf; es ist dann alle Luft aus der Tonzelle ausgetreten und sie ist ganz von hineindiffundierendem Wasserstoff erfüllt, der dann ebenso schnell gleichzeitig herausdiffundiert, so daß nichts weiter sich ändert, der Vorgang beharrend („stationär") geworden ist. Hebt man nun die Glocke G weg, so daß die Tonzelle außen an Luft grenzt, so beginnt sofort ein umgekehrter Ablauf. Es ist jetzt in der Tonzelle das schneller diffundierende Gas, und es entsteht infolgedessen jetzt Unterdruck in ihr, was an sehr beträchtlichem Hochsteigen des Wassers im Rohre R merklich wird, wie es die Abbildung zeigt.

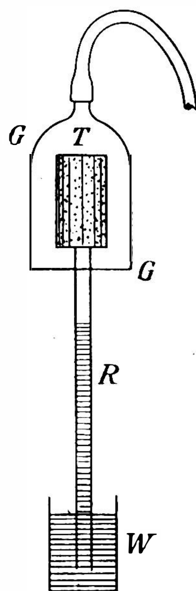


Abb. 93. Diffusion.

Man sieht, daß diese Diffusionsvorrichtung als Pumpe wirkt; sie kann Gas hin- oder wegpumpen; sie kann auch Wasser hochpumpen. Dies ist erst spät in den „Diffusionsluftpumpen" zu leichter Herstellung höchster Gasverdünnungen benutzt worden. Will man beliebige Gase durch ihre eigene Diffusion aus einem Raume fortgehen lassen (wie den Wasserstoff aus der Tonzelle, der Unterdruck hinter sich ließ), so muß das andere Gas, gegen welches die Diffusion vor sich gehen soll, langsamer diffundieren als alle fortzuschaffenden Gase. Es muß also ein größeres Molekulargewicht haben (366) als diese. Hierzu eignet sich der Quecksilberdampf (Molekulargewicht 200), der noch dazu den Vorteil bietet, daß seine in den zu entleerenden Raum hineindiffundierenden Mengen leicht durch Kühlung zu flüssigem Quecksilber verdichtet und also beiseite geschafft werden können. Es strömt in den Diffusionsluftpumpen Quecksilberdampf aus einem Quecksilberkochgefäß an Öffnungen vorbei, die an den auszupumpenden Raum grenzen, oder auch in einem Strahl durch diesen Raum (sehr ähnlich dem Wasserstrahl in der Wasserluftpumpe, 408, Abb. 112), so daß das wegzupumpende Gas in den Quecksilberdampf hineindiffundieren kann und mit ihm weitergeführt wird. Es gelangt dann mit dem Dampf in ein Vorvakuum, das von einer besonderen Pumpe bedient wird (etwa einer Wasserluftpumpe). Der Quecksilberdampf wird durch Wasserkühlung immer wieder verflüssigt, und das flüssige Quecksilber kehrt in das Kochgefäß zurück, wobei es ein Ventil bildet, das das Eindringen bereits weggepumpten Gases aus dem Vorvakuum in den Dampfraum (und damit ins Hauptvakuum) verhindert. Das Besondere dieser Luftpumpen ist einerseits, daß sie nicht nur Gase, sondern auch Dämpfe wegpumpen, andererseits daß sie am besten und schnellsten bei schon geringen Drucken wirken, weil dann die Diffusion wegen der vergrößerten molekularen Zwischenräume nur immer noch schneller wird.

Die Abhängigkeit der Diffusionsgeschwindigkeit vom Molekulargewicht (366) kann zur Trennung von gemischten Gasen verschiedenen Molekulargewichts benutzt werden. In dem durch eine poröse Wand gegangenen Anteil des Gemisches ist das geringere Molekulargewicht angereichert. Die Wirkung ist bei einmaliger Diffusion nur gering; sie kann aber durch wiederholte Diffusionen beliebig gesteigert werden. Dieses Trennungsverfahren ist besonders bei Edelgasen und bei Isotopen wichtig, die auf chemischem Wege nicht trennbar sind (E 518).

368. Osmose nennt man Diffusion durch „halbdurchlässige" („semipermeable") Wände. Es sind dies Wände, die einen bestimmten Stoff durchlassen, einen anderen aber nicht. Trennt eine solche Wand zwei Flüssigkeiten, die durchgelassen werden, von denen die eine aber auch einen nicht durchgelassenen Stoff enthält, so wird die Diffusion einseitig; denn der

nicht durchgelassene Stoff versperrt teilweise, je nach seiner Menge, den Diffusionsweg nach der anderen Seite hin. Es entsteht dann ein Überdruck auf der Seite des nicht durchgelassenen Stoffes, wenn das Volum dort beschränkt ist. Der Überdruck wächst so lange, bis er genügend der Einseitigkeit entgegenwirkt, bis nämlich gleich viele Moleküle des überhaupt diffundierenden Stoffes heraus- und hereingehen; dann ist der Zustand beharrend. Meist untersucht ist die Osmose von Lösungen; die zu benutzende Wand muß dann die Moleküle des Lösungsmittels, die „Lösungsmittelmoleküle" durchlassen, die Moleküle des gelösten Stoffes, die „Lösungsmoleküle" aber nicht.

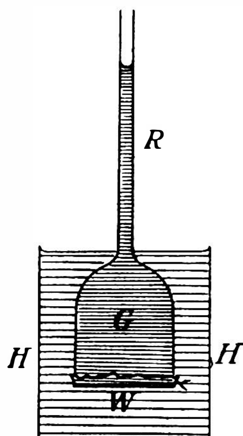


Abb. 94. Osmose.

Es sei in dem mit Steigrohr R versehenen Gefäß G (Abb. 94) eine wässerige Lösung, z. B. von Kupfervitriol. Das Gefäß ist unten durch eine tierische Haut W abgeschlossen, die undurchlässig ist für die Lösungsmoleküle, aber durchlässig für die Lösungsmittelmoleküle, die Wassermoleküle; außen, in dem Gefäße H, sei Wasser. Es kann dann nur Wasser aus- und eindiffundieren; die Lösungsmoleküle bleiben ganz auf das Innere von G beschränkt. Das Eintreten des beharrenden Zustandes erkennt man am Stillstand des Steigens der Flüssigkeitssäule im Rohre R, und die Höhe dieser Säule macht den durch die Diffusion eintretenden Überdruck, den „osmotischen Druck" meßbar. Unter diesem Überdruck diffundieren dann gleichviele Wassermoleküle aus wie ein, während ohne Überdruck das Hereindiffundieren überwiegend wäre, weil das Herausdiffundieren behindert ist durch die Lösungsmoleküle, welche die durch die Wand führenden Wege in der Richtung heraus zu versperren, so oft sie in ihrer Wärmebewegung an die Wand W kommen. Sie wirken wie Ventile, die den Durchtritt einseitig verhindern.

Der osmotische Druck ist hiernach ein Maß für die versperrende Wirkung der Lösungsmoleküle, und es ist verständlich, daß es dabei gleichgültig ist, woraus diese versperrenden Ventile bestehen, so daß es nur auf deren Zahl in der Volumeinheit ankommt. Dies entspricht der Erfahrung, daß Lösungen beliebiger Stoffe gleichen osmotischen Druck ergeben, wenn sie gleich viele gelöste Moleküle in der Volumeinheit enthalten[1]). Dabei ist es auch gleichgültig, in welcher Weise die auswählende Versperrung des Durchtritts erfolgt. Es können Kanäle in der semipermeablen Wand sein, die für die meist großen Lösungsmoleküle[2]) zu eng sind; es kann aber auch Absorption und Wiederabgabe mittels besonderer Molekularkräfte des Wandstoffes wirken, so daß die Wand nur den einen Stoff absorbiert und an der anderen Seite abgibt, den andern nicht.

Die gemeinsame Gültigkeit der Gleichung von van der Waals für Flüssigkeiten und für Gase (360), wobei auch der innere Druck mitgerechnet wird, läßt vermuten, daß der osmotische Druck gleich einem Gasdruck sich verhält. In der Tat wurde der osmotische Druck von Lösungen in nachgeprüften Fällen angenähert gleich gefunden dem Drucke, welchen der gelöste Stoff in Gasgestalt (aber in gleicher molekularer Beschaffenheit wie in der Lösung), für sich allein im Lösungsraum vorhanden, ausüben würde. Dieser Druck, ausgeübt vermittels der Wärmebewegung von den Molekülen, für welche die Wand undurchlässig ist, bleibt danach als Überdruck beharrend, während der von den durchgelassenen Lösungsmittelmolekülen ausgeübte Druck durch die Wand sich ausgleichen kann. Man hat bei wässerigen Zuckerlösungen, die durch eine halbdurchlässige Wand von Wasser getrennt sind, den Molekülzahlen entsprechende Drucke auch gemessen; sie betrugen bis über 20 Atm.

Man kann im osmotischen Druck einen Teil des sehr großen inneren Druckes (341) der Flüssigkeit sehen, der durch die Ventile in deren Durchlassungsrichtung einseitig überschüssig gemacht und daher merklich wird.

---

[1]) Zwei verwandte Erscheinungen — Schmelzpunktserniedrigung und Dampfspannungserniedrigung bei Lösungen —, für welche ebenfalls nur die Zahl der gelösten Moleküle maßgebend ist, behandeln wir in der Wärmelehre (W 197, 223).

[2]) Lösungsmoleküle bestehen aus Zusammenlagerungen der Moleküle des gelösten Stoffes mit Lösungsmittelmolekülen, was am besten bei den Salzlösungen (Elektrolyten) untersucht ist (E 199).

Osmose ist von Wichtigkeit für das Leben der Pflanzen und Tiere. Jede lebende Zelle besitzt eine halbdurchlässige Hülle, welche Wasser und Nährstoffe durchläßt, die großen, lebenswichtigen Moleküle des Zellinhaltes aber nicht herausläßt. Trennt eine solche Wand zwei Zellräume, die ungleichen Wassergehalt, also auch ungleiche Ventilzahlen in der Volumeinheit haben, so wird der Wassergehalt durch die Wand nach Ausgleichung streben, und es geschieht dies mit den erheblichen Drucken, welche der im flüssigen Zustande stets großen Zahl der Moleküle in der Volumeinheit entsprechen. Den anderen Vorgang, welcher auch ohne Osmose Flüssigkeiten im Pflanzen- und Tierkörper zur Verbreitung bringt, haben wir bereits betrachtet (339, 342).

Flüssigkeits- und Gasbewegungen, betrachtet ohne wesentliche Mitwirkung von Reibung.

369. Torricellis Satz vom Ausfluß. — Es sei eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s bis zur Höhe h in einem Gefäß (Abb. 95) enthalten, aus dem sie unten durch eine Öffnung in beliebiger (z. B. horizontaler) Richtung ausfließe. Es sei die Geschwindigkeit v zu berechnen, mit der die Flüssigkeit die Öffnung verläßt.

Reibung wirke nicht mit, was sehr nahe dadurch zu erreichen ist, daß die Öffnung, in der große Geschwindigkeiten vorkommen, ein einfaches Loch in dünner Wand ist, so daß diese Geschwindigkeiten nur auf einer sehr kurzen Strecke in der Nähe ruhender Teile vorkommen.

Außerdem sei das Gefäß so weit, daß die Flüssigkeit in ihm trotz Ausfluß nur so langsam sinkt, daß mit ihrer lebendigen Kraft nicht gerechnet zu werden braucht. Es finde also der Ausfluß so gut wie von der Ruhe aus statt. Zudem werde nur der Zustand beharrender (stationärer) Bewegung betrachtet, der kurze Zeit nach Beginn des Ausflusses mit dann nicht weiter wachsender Geschwindigkeit sich einstellt (vgl. 381).

Man kommt unter diesen Umständen sehr einfach mit dem Energiegesetz zur Kenntnis der Ausflußgeschwindigkeit v. Der Ausflußvorgang erscheint dabei als ein Energieumwandlungsvorgang. Es verschwindet potentielle Energie aus der Flüssigkeit im Gefäß, da die Oberfläche sinkt, und es erscheint dafür kinetische Energie im ausfließenden Strahl. Andere Energieformen wirken nicht mit, besonders auch nicht Wärme, insofern keine Reibung stattfindet. Es muß daher nach dem Energiegesetz die Menge der verschwindenden potentiellen Energie gleich sein der gleichzeitig erscheinenden Menge kinetischer Energie. Es sei ein Zeitabschnitt betrachtet, während welchem q gr der Flüssigkeit (in der Abbildung schraffiert) oben im Gefäß verschwinden und ebensoviel unten als Strahl heraustreten. Die verschwindende potentielle Energie ist dann qh, weil q gr um h tiefer sich finden. Die erscheinende kinetische Energie ist $mv^2/2 = (q/g)v^2/2$ (vgl. 131). Die Gleichsetzung beider Energiemengen ergibt die gesuchte Geschwindigkeit

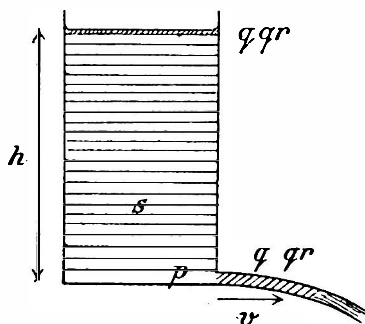


Abb. 95. Ausfluß.

$$v = \sqrt{2gh}. \qquad 369)$$

Es ist das dieselbe Geschwindigkeit, welche irgendein Körper auf der Erde im freien Fall durch die Höhe h erlangt (vgl. 132), und dies ist der Satz von

Torricelli: Es ist bei reibungslosem, beharrendem Ausfluß ruhender Flüssigkeiten unter dem Einfluß ihrer Schwere aus einem Gefäße mit freier Oberfläche die Ausflußgeschwindigkeit gleich der Geschwindigkeit, welche ein von der Oberfläche bis zur Ausflußöffnung frei herabfallender Körper erlangen würde.

Es ist dies der erste je bekannt gewordene Satz der Hydrodynamik; Torricelli fand ihn durch reichlich variierte Ausflußversuche, namentlich auch bei verschiedenen Höhen h. Er enthält schon eine Fülle von Erkenntnissen, wie das Folgende zeigt (370—380); sie sind alle durch Erfahrung bestätigt.

370. Der Ausfluß als Fallerscheinung an Flüssigkeiten. — Die Richtung, in welcher der Strahl austritt, ist gleichgültig; ist die Öffnung nach oben gerichtet, so springt er bei genügender Fernhaltung von Reibung bis zur Höhenlage der freien Oberfläche im Gefäß hinauf[1]), was nach dem über den senkrechten Wurf Bekannten (140) unmittelbar Torricellis Satz bestätigt.

Besonders bemerkenswert ist es, daß in der Gl. 369 für die Ausflußgeschwindigkeit nichts von der Natur der Flüssigkeit vorkommt, auch nicht ihr spezifisches Gewicht. Obgleich es also allein die Schwere der Flüssigkeit ist, die sie aus der Öffnung treibt, soll doch das Gewicht der Flüssigkeit gleichgültig sein. Man überzeugt sich von dem Zutreffen, wenn man etwa Quecksilber, Wasser, Alkohol nacheinander aus gleichem Gefäße von gleicher Höhe aus ausfließen läßt; sie brauchen gleiche Zeiten dazu[2]), obgleich doch beispielsweise das Quecksilber unter einem seiner Schwere entsprechenden, weit größeren Drucke ausfließt als der Alkohol. Die Lösung des scheinbaren Widerspruches liegt in der Bemerkung, daß das schwere Quecksilber auch entsprechend träger ist und also den großen Druck auch nötig hat zur Erlangung der Geschwindigkeit, die nicht größer ist als bei Wasser oder Alkohol. Es ist somit nur die Proportionalität von Schwere und Trägheit, von Gewicht und Masse, die hier wieder sich zeigt (119). Oder: es ist hier der Nachweis des gleich schnellen Fallens aller Körper bei Flüssigkeiten erbracht.

371. Ausfluß bei gegebenem Druck. — Der Austritt der den Strahl bildenden Flüssigkeitsteile erfolgt zwar mit der nach Gl. 369 zu berechnenden Geschwindigkeit, als wären sie von der Oberfläche der Flüssigkeit herabgefallen; doch sind es überhaupt nicht Teile von der Oberfläche, die austreten. Sondern es sind Teile aus der nächsten Umgebung der Öffnung, die — kurz vorher noch nahezu ruhend — in das Bereich des starken „Druckgefälles" (383) kommen, welches an der Öffnung selbst herrscht, wo der volle, einer ruhenden Flüssigkeitssäule h beim spezifischen Gewicht s entsprechende innere Überdruck hs (301) auf kurzer, durch die Öffnung führender Strecke zu Null herabsinkt. Der große, nach außen gerichtete Druckunterschied ist es, unter dessen Einfluß jedes Raumelement der Flüssigkeit an der Öffnung die große Beschleunigung erhält, welche seine Geschwindigkeit auf kurzer Strecke von Null aus auf die berechnete Größe v bringt. Da der gesamte Druckunterschied $p = hs$ nur von der Schwere der Flüssig-

---

[1]) Zerfällt der Strahl dabei in Tropfen, so muß ein wenig Höhe fehlen, weil die Oberflächenspannung ihn dann zurückhält.

[2]) Es ist leicht einzusehen, daß man bei diesem Vergleichsversuch beliebige — nur bei jeder Flüssigkeit gleiche — Anfangs- und Endhöhen des Ausfließens wählen kann, weil zwischen beiden dann für alle Flüssigkeiten auch die gleichen Zwischenhöhen liegen.

keit kommt, ist es erklärlich, daß v als eine Fallgeschwindigkeit sich ergeben konnte, obgleich sie nicht Ergebnis eines Fallens ist[1]).

Es muß aber dieselbe Ausflußgeschwindigkeit v statthaben, so oft bei derselben Flüssigkeit derselbe innere Überdruck p vorhanden ist, auch wenn er nicht von der Schwere stammt, sondern beliebigen Ursprungs ist. Daher wird Gl. 369 allgemeiner benutzbar, wenn man statt der Höhe h den Druck p in sie einführt. Sie nimmt so, weil $h = p/s$ ist, die Form an

$$v = \sqrt{\frac{2pg}{s}} = \sqrt{\frac{2p}{D}}, \qquad 371)$$

worin $D = s/g$ die Dichte der Flüssigkeit (Masse/Volum) ist (125).

In dieser Form gibt die Gleichung beispielsweise unmittelbar die Geschwindigkeit eines Strahles an, den (reibungslos) eine Wasserleitung liefern kann, deren Überdruck man gemessen hat, ohne die Höhenlage eines (vielleicht gar nicht vorhandenen) Wasserbehälters kennen zu müssen.

372. Ausfluß von Gasen. — Besonders wichtig ist die Gl. 371 für Gase, deren Druck für gewöhnlich überhaupt nicht von ihrer Schwere kommt.

Bemerkenswert ist, daß jetzt, in Gl. 371, das spezifische Gewicht s oder die Dichte D maßgebend ist, während früher (Gl. 369) die Natur der Flüssigkeit einflußlos erschien. Dies entspricht aber dem Umstand, daß jetzt der Druck p einer beliebigen, auch einer der Flüssigkeitsdichte nicht proportionalen Kraft entstammen kann. Ist p proportional s oder D, wie bei Wirkung der Schwerkraft, so fällt die Flüssigkeitseigenschaft wieder heraus; vergleicht man aber verschiedene Flüssigkeiten oder Gase unter gleichem Überdruck p, so muß nach Gl. 371 die (reibungslose) Ausflußgeschwindigkeit verkehrt proportional der Wurzel aus der Dichte sein.

Man kann hiernach Gasdichten mittels der Uhr vergleichen, wenn man die Ausströmungszeiten der Gase aus derselben Öffnung mißt, was mit gutem Erfolg geschehen ist. Wasserstoffgas mit der kleinsten Dichte strömt am schnellsten aus. Dies hängt aufs engste zusammen mit der ebenso von der Dichte abhängenden Diffusionsgeschwindigkeit (366); denn auch die Ausflußgeschwindigkeit ist durch die Molekulargeschwindigkeit der Wärmebewegung bedingt. Am einfachsten ist dies einzusehen, wenn man die Ausströmung in den leeren Raum betrachtet, wie folgt.

373. Bei der Gasausströmung in den leeren Raum tritt die Besonderheit auf, daß deren Geschwindigkeit unabhängig vom Druck ist. Denn da der Überdruck p in Gl. 371 hier — wo außen kein Druck ist — den vollen Druck bedeutet, die Dichte D aber, wie das spezifische Gewicht, nach Boyles und Mariottes Gesetz diesem Druck proportional ist (363), so ist p/D und damit auch v unabhängig vom Druck. Es strömt also z. B. Luft von 100 Atm. Druck nur ebenso schnell ins Vakuum aus als Luft von 1 Atm. Druck. Dies stimmt wieder damit überein, daß jedes Gas einfach mit seiner Molekulargeschwindigkeit ausströmt; denn was austritt sind die Moleküle des Gases mit nur den Geschwindigkeiten, die sie auch vor dem Austritt schon hatten[2]). Diese Geschwindig-

---

[1]) Daß die Berechnung der Geschwindigkeit nicht nur mittels des Energiegesetzes, sondern bei Benutzung des bekannten Druckes auch nach dem Grundgesetz (115) mit gleichem Ergebnis möglich sein muß, dies geht schon aus der Berechnung der Gleichung für die kinetische Energie, $mv^2/2$, hervor (146), welche ganz auf das Grundgesetz sich stützte.

[2]) Die Geschwindigkeit v in Gl. 371, in deren Anwendung auf Gase gilt, nach dem Sinn der Ableitung, wie alle Molekulargeschwindigkeiten (W 34), relativ zum Volumelement, aus welchem die Ausströmung erfolgt. Hat dieses Volumelement, etwa in einer Düse, schon vor der Ausströmung eine Geschwindigkeit in Ausströmungsrichtung, so ist die Ausströmungsgeschwindigkeit relativ zur Düse entsprechend vermehrt (vgl. 42).

keiten sind aber bei allen Drucken dieselben; sie steigen nur mit der Temperatur und sind um so größer, je kleiner das Molekulargewicht ist (W 87). Die Molekulargeschwindigkeit ist beispielsweise bei Sauerstoff von 0°C 461 m/sek, bei Wasserstoff 1844 m/sek[1]).

Geschosse oder Meteore, die mit größerer Geschwindigkeit als rund 500 m/sek durch die Luft sich bewegen, erzeugen leeren Raum hinter sich, da die Luft — wie es die Zahlen zeigen — nicht schnell genug hinter sie strömen kann; sie fliegen daher gegen den vollen (und durch Verdichtung der Luft vor ihnen noch vermehrten) Luftdruck und erfahren daher einen besonders großen Luftwiderstand.

374. Ausfluß bei beliebiger Anfangsgeschwindigkeit. — Bei Torricellis Satz war angenommen, daß der Ausfluß von der Ruhe aus stattfindet. Ist schon Anfangsgeschwindigkeit vorhanden, so führt man leicht dieselbe Rechnung nach dem Energiegesetz durch wie oben (369), und man findet, daß die Zunahme der kinetischen Energie der Volumeinheit beim reibungslosen Ausfluß gleich ist der Druckstufe, unter welcher der Ausfluß stattfindet. Dem entspricht, wie es sein muß, auch Gl. 371. Denn es ist nach ihr

$$\frac{Dv^2}{2} = p, \qquad 374)$$

und $Dv^2/2$ ist die kinetische Energie der Volumeinheit der strömenden Flüssigkeit, da D die Masse der Volumeinheit ist, während p der Überdruck ist, d. i. die Druckstufe, durch welche die kinetische Energie der Volumeinheit von Null auf $Dv^2/2$ gewachsen ist.

375. Kinetische Energie und Druck. — Diese Gleichheit der Stufen von kinetischer Energie der Volumeinheit und Druck gilt ganz allgemein für alle Flüssigkeits- und Gasbewegungen unter dem Einfluß von Druckunterschieden beim Fehlen von Reibung: Jedesmal wenn Flüssigkeit oder Gas von einem Ort höheren Druckes nach einem Ort niederen Druckes sich bewegt, muß dabei die Geschwindigkeit nach Maßgabe dieser Stufengleichheit steigen, sofern nicht die Reibung dem entgegenwirkt. Findet die Bewegung in der entgegengesetzten Richtung, von einem Ort niedrigeren Druckes zum Ort höheren Druckes statt, so muß die Geschwindigkeit entsprechend sinken.

Kennt man von vornherein die räumliche Verteilung der Geschwindigkeiten, so kann man daraus nach demselben Satze Schlüsse auf die Druckverteilung ziehen. Ein Steigen der Geschwindigkeit von Stelle zu Stelle in einem Flüssigkeits- oder Gasraum muß mit entsprechender Drucksenkung, ein Sinken der Geschwindigkeit mit Druckanstieg in der Bewegungsrichtung verbunden sein. Geht z. B. ein weites Wasserleitungsrohr an einer Stelle in ein enges von 10mal kleinerem Querschnitt über, so muß wegen der sehr kleinen Kompressibilität des Wassers die Strömungsgeschwindigkeit an dieser Stelle auf das 10fache steigen (382). Dem entsprechend muß an dieser Stelle auch eine Druckstufe von selber sich einstellen derart, daß im weiten Rohr hoher, im engen entsprechend niedriger Druck herrscht, und dies gilt auch für die umgekehrte Bewegungsrichtung. Die Größe der Druckstufe ist nach dem Satz leicht berechenbar.

Auf dem Satze von den Geschwindigkeits- und Druckstufen beruht auch eine einfache Meßweise von Strömungsgeschwindigkeiten. Stellt man dem zu messenden Flüssigkeits- oder Gasstrom die Mündung eines Rohres entgegen (r in Abb. 96), das andererseits verschlossen ist, so stellt sich in dem Rohre ein gewisser Druck ein, der höher ist als der außerhalb der Rohrmündung im strömenden Gas vorhandene Druck. Letzterer findet sich in einer Abzweigung r_1,

[1]) Diese Geschwindigkeiten sind quadratische Mittelwerte der immer etwas uneinheitlichen Molekulargeschwindigkeiten; setzt man an ihre Stelle die häufigst vorhandene Geschwindigkeit, welche im Verhältnis $\sqrt{2/3}$ kleiner ist als der quadratische Mittelwert, so ist die Übereinstimmung von v (Gl. 371) mit der Molekulargeschwindigkeit vollkommen (W 87, 88).

die senkrecht zur Geschwindigkeit gestellt ist, so daß diese dort keine Änderung erleidet und also auch keine Druckänderung stattfindet. Mißt man den Druckunterschied p der Rohre r und r_1, was einfach durch den U förmigen Druckzeiger D geschehen kann, so ist aus ihm die gesuchte Geschwindigkeit v nach Gl. 371 berechenbar. Denn es ist außerhalb der Rohrmündung r die zu messende Geschwindigkeit vorhanden, innerhalb aber wegen des Verschlusses die Geschwindigkeit Null; es ist also der gemessene Druckunterschied p die zur gesuchten Geschwindigkeit gehörige Druckstufe.

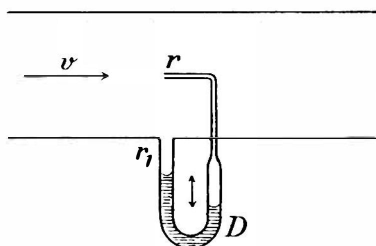


Abb. 96. Messung von Gasgeschwindigkeit nach Torricellis Satz.

Die gut geprüfte Übereinstimmung so ermittelter Geschwindigkeiten (z. B. über den ganzen Querschnitt eines Rohres) mit anderweitigen, mehr direkten Ermittelungen derselben, sichert in bemerkenswerter Weise die Richtigkeit von Gl. 371 und damit auch den Satz von der Stufengleichheit der kinetischen Energien und der Drucke. Es muß nur die Voraussetzung der Reibungslosigkeit erfüllt sein. Dazu muß das Rohr r sehr fein und äußerst dünnwandig ausmünden, damit es nicht nur die zu messende Strömung nicht wesentlich abändert, sondern auch keine verwickelten Bewegungsvorgänge (Wirbel) veranlaßt, die unter viel Reibung verlaufen. Die Drucke an den Mündungen von r und r_1 werden richtig, ungeändert zum Druckzeiger D übertragen, da in den beiden Rohren im Dauerzustand Ruhe ist.

376. Druck und Energiedichte. — Man faßt alle diese zu Torricellis Satz gehörige Kenntnis (369—375) am einfachsten zusammen, wenn man überhaupt nur nach dem Energiegesetz überlegt. Es ist dann Druck stets als Energiedichte zu betrachten, nämlich als Menge derjenigen Energie in der drückenden Volumeinheit, welche bei Wirksamwerden des Druckes zur Verwandlung in andere Form kommt.

Es kommt dieser Satz von Druck und Energiedichte auch in vielen weiteren Beziehungen zur Geltung, so beim Schalldruck (A 87), beim gewöhnlichen Gasdruck (W 81), beim Druck elektrischer und magnetischer Kräfte (E 128, 275), beim elektromagnetischen Strahlungsdruck (E 433). Danach hat man mit gegebenem, oft leicht zu messendem Druck Energiedichten gegeben, aus denen nach dem Energiegesetz oft leicht weiteres zu schließen ist, und umgekehrt sind gegebene Energiedichten unmittelbar als Drucke zu werten, wovon die angegebenen Stellen Beispiele bringen. Die Schwierigkeit bei der Anwendung ist nur, daß in jedem Falle erst untersucht sein muß, welcher Teil der im Raum vorhandenen Energie bei der Druckarbeit überhaupt zur Verwandlung (Wanderung) kommt[1]); kaum jemals ist es die Gesamtenergie des Raumes; besonders bleibt die Energie des Inneren anwesender Atome zu allermeist unbeteiligt[2]).

Der Gleichsetzung von Druck und Energiedichte entspricht auch die Gleichheit des Maßes dieser beiden Größen. Druck ist Kraft/Fläche; Energie ist Kraft · Weg, Energiedichte also Kraft · Weg/Volum = Kraft/Fläche.

In der Anwendung auf die hier zu behandelnden Vorgänge der Flüssigkeits- und Gasbewegung kann der Satz vom Druck und der Energiedichte auch in der Form ausgesprochen werden: Ist Flüssigkeit oder Gas unter Druckwirkung bewegt, so kann kinetische Energie oder auch Wärme (oder eine andere Energieform) in jedem bewegten Volumelement erscheinen oder auch ver-

[1]) Siehe dazu z. B. W 81, Note 1.

[2]) Dem großen Energieinhalt der Atome entsprechen allerdings die großen Drucke, welchen die Atome mit ihren abstoßenden Kräften das Gleichgewicht halten können (305).

schwinden; es muß aber dann nach dem Energiegesetz eine entsprechende Druckänderung da sein, so daß die Summe aller Energieformen im Volumelement (Druck, kinetische Energie der Volumeinheit, Wärmeinhalt) konstant bleibt. Man sieht, daß der Satz auch bereits Reibungs- oder andere Vorgänge mit umfaßt, bei denen Wärme auftritt, da die Wärme als Energieform sogleich miteinbegriffen ist (vgl. 381 u. f.). Es ist nach dem Energiegesetz unmittelbar klar, daß der Satz in dieser Form nur insofern gelten kann, als das betrachtete Volumelement nicht von Energie-Ein- oder -Auswanderungen betroffen ist.

377. Turbinen. — Die Natur bietet auf der Erdoberfläche immer wieder neue Energievorräte — kommend von der Sonne (W 164) — im stets wieder neu gehobenen Wasser der Bäche und Flüsse. Strömt dies Wasser die Berge hinab, so geht seine potentielle Energie unter dem Einfluß von Reibung ganz in Wärme über und wird dadurch scheinbar verloren. Die Absicht der Wassermotoren, Mühlräder und Turbinen ist es, die Energie des bergabströmenden Wassers aufzufangen und für beliebige Zwecke verfügbar zu machen.

Die wirksamsten Turbinen arbeiten nicht mit der Reibungskraft des strömenden Wassers, wie die Wasserräder der alten Schiffsmühlen auf den großen Flüssen es taten, sondern sie benutzen die potentielle Energie von Wasserläufen mit genügendem Gefälle. Es ist hierbei nach dem Energiegesetz von vornherein klar, daß aus P kgr (oder l) Wasser, das um h m sinkt, nur P · h mkgr Arbeit erscheinen kann, und daß man dieser Grenzwirkung um so mehr sich nähern wird, je geschickter das Sinken des Wassers in der Turbine so geleitet wird, daß die Energie aus den Raumelementen des Wassers möglichst ganz in die Turbinenräder übergeht, nicht in inneren Bewegungen des Wassers und damit durch innere Reibung in Wärme sich erschöpft. Die Ausführung hiervon war im Laufe der Zeiten Sache des Ausprobierens, jedoch geleitet von den eben erwähnten einfachen Gedanken des Energiegesetzes.

Die zu gewinnenden Energiemengen sind groß. Man nehme als Beispiel die Höhenstufe des Rheinfalles, die 20 m beträgt. Finge man nur 1 l/sek des Rheinwassers oben ab und ließe es durch eine vollkommen wirkende Turbine herabsinken, statt im freien Falle, so gewänne man 20 mkgr/sek; mit 4 l/sek wären es schon 80 mkgr/sek, d. i. mehr als 1 PS (293); mit 4 m^3/sek, was beim Wasserreichtum eines großen Flusses auch noch wenig ist, hätte man also schon mehr als 1000 PS.

Ebenso große Leistungen erreicht man auch mit wenig Wasser, wenn es von großen Höhen kommt, wie bei Hochgebirgsbächen; denn das die Energie bestimmende Produkt aus Höhe und Wassergewicht wird durch beide Faktoren gleich beeinflußt. Ein Wasserreichtum von nur 0·08 m^3/sek bei 1000 m Höhe liefert ebenfalls über 1000 PS.

Viel Wasser mit geringem Gefälle und wenig Wasser mit großem Gefälle sind also gleich energiereich. Doch sind für diese beiden Extremfälle zwei verschiedene Turbinenarten herausgebildet worden.

Bei viel Wasser läßt man dasselbe in breitem, verhältnismäßig langsamem Strome an das Turbinenrad kommen, dessen Flügel oder Schaufeln die Energie aufnehmen sollen. Die Aufnahme geschieht durch den Druck des Wassers auf die Schaufeln, und da dieser nur von Geschwindigkeitsänderung des Wassers an den Schaufeln kommt, wofür Gl. 374 und die Überlegungen von 375 maßgebend sind, müssen die Schaufeln langsamer als das an sie herankommende Wasser sich bewegen[1]). Die Verlangsamung des Wassers an den Schaufeln darf aber nicht zu groß sein, da sonst Wirbelbewegung im Wasser kommt, die große Reibungsverluste bedeutet (409). Die Schaufeln müssen vielmehr so geformt sein, daß sie die Geschwindigkeit des Wassers allmählich vermindern, während es an ihnen vorbeiläuft, und daß sie schließlich das Wasser möglichst ohne Geschwindigkeit und ohne Druck entlassen[2]). Aus einer guten Turbine kommt das

---

[1]) Die Geschwindigkeit v der Flüssigkeit ist relativ zu den Schaufeln zu nehmen, um den Druck p zu berechnen, der ohne Reibungsverlust auf dieselben ausgeübt würde.

[2]) Man kann die Turbine je nach der Form der Schaufeln als Umkehrung der Zentrifugalpumpe oder auch der Schiffsschraube ansehen.

Wasser ganz ruhig und auch ohne jede Temperaturerhöhung heraus[1]); sonst hätte Energieverlust stattgefunden.

Abb. 97 zeigt den Horizontalschnitt durch den oberen Teil einer Turbine für große Wassermengen (Q) bei nicht großem Gefälle (H); ihre tatsächliche Leistung, 2460 PS, beträgt über 82 v. H. des durch Q · H gegebenen Höchstmöglichen. Da das Wasser mit einer Geschwindigkeit einströmt, die immerhin mehrere m/sek beträgt, muß das Turbinenrad (r r) mit entsprechender Geschwindigkeit sich drehen (2·8 Umläufe/sek), zumal die Wassergeschwindigkeit beim radialen Zusammenströmen gegen das Rad hin noch steigt. Dieses Zusammenströmen wird durch stehende Leitschaufeln (l l) sowie durch die Wände des Wasserkanals so geleitet (nach Strömungslinien, vgl. 387 u. f.), daß auch dabei kein Wirbeln auftritt.

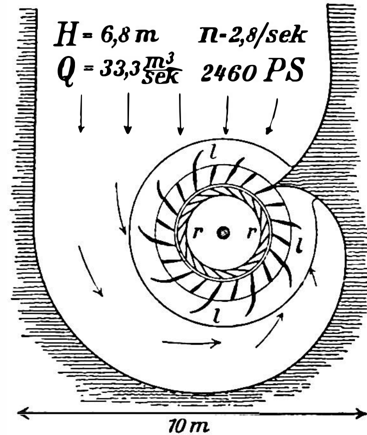


Abb. 97. Turbine.

Für geringe Wassermengen bei großen Höhen läßt man das Wasser oben in einen nahezu vertikalen Schacht einströmen, aus dem es unten durch enge Öffnungen in Strahlen austritt, die auf die Schaufeln des Turbinenrades wirken. Die nach Torricellis Satz zu berechnende Geschwindigkeit des Wassers in diesen Strahlen ist wegen des großen Ausflußdrucks sehr groß. Es muß daher auch die Umlaufsgeschwindigkeit solcher Strahlturbinen sehr groß sein. Braucht man langsamere Bewegung mit entsprechend mehr Kraft, so können Vorgelege angewendet werden (103).

So wie diese Wasserstrahlturbinen arbeiten auch die Dampfturbinen. Auch hier wird Druckenergie vorerst in kinetische Energie verwandelt und diese in die Maschine geführt, die wieder im wesentlichen aus Schaufelrädern besteht. So ist am allereinfachsten und unmittelbar die meist gewünschte Drehbewegung zu erhalten. Die Dampfturbinen haben auch den Vorteil, daß sie mit höheren Dampftemperaturen (und entsprechenden Drucken) arbeiten können, als Zylinder mit Kolben, was erhöhten Wirkungsgrad ergibt (W 254).

378. Berechnung der Arbeit von Druck bei Volumänderung. — Flüssigkeiten und Gase (Dämpfe) können Arbeit leisten, wenn ihr Druck bewegliche feste Wände unter Volumvergrößerung verschieben kann, wie das bei der Dampfmaschine im Zylinder mit Kolben geschieht. Es genügt zu allgemeingültiger Arbeitsberechnung diesen letzteren Fall zu betrachten, da jedes Wandstück eines beliebig geformten, in Vergrößerung begriffenen Volums gleich dem Kolben des Zylinders verschoben wird.

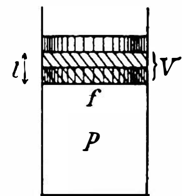


Abb. 98. Arbeitsleistung durch Gas- oder Flüssigkeitsdruck.

Es sei im Zylinder (Abb. 98) der Druck p vorhanden, wirkend auf den Kolben mit der Fläche f, und es werde der Kolben durch den Druck um die Strecke l vorangeschoben. Die dabei am Kolben geleistete Arbeit A ist zu berechnen als Produkt aus Kraft und Weg. Die Kraft ergibt sich aus dem Druck, der Kraft/Fläche ist, zu $p \cdot f$. Es ist also die Arbeit $A = p \cdot f \cdot l$. $f \cdot l$ ist aber das Volum V (in der Abbildung schräg schraffiert), um welches der Druckraum sich vergrößert hat. Somit ist die Arbeit

$$\left.\begin{array}{c} A = pV, \\ \text{Druckarbeit} = \text{Druck} \cdot \text{Volumänderung}. \end{array}\right\} \quad 378)$$

Es treten also bei der Arbeitsberechnung, wenn an Stelle der Kraft der Druck

[1]) Hierbei ist wegen des großen mechanischen Wärmeäquivalents (vgl. W 76) immer nur an äußerst geringe Temperaturerhöhungen zu denken.

gegeben ist, an Stelle der beiden Faktoren Kraft und Weg die beiden Faktoren Druck und Volumänderung. Diese Arbeitsberechnung ist in Übereinstimmung mit der Kenntnis, daß Druck = Energie/Volum ist (376).

Ändert sich der Druck p bei der Vergrößerung des Volums, wie es z. B. bei abgeschlossenem Gas im Zylinder der Fall wäre, so muß mit kleinen Volumänderungen dV beim jedesmal zugehörigen Druck p gesondert gerechnet werden; es ist dann die jedesmalige kleine Arbeitsleistung

$$dA = p\,dV \qquad 378a)$$

379. Druckwirkung bei Flüssigkeiten und bei Gasen. — Es ist ein wesentlicher Unterschied zwischen Gasen und Flüssigkeiten merklich bei Druckarbeit in abgeschlossenem Gefäß ohne Energienachlieferung von außen.

Ein Gas, das immer Druck nach außen ausübt, kann seinen gesamten, für Druckwirkung in Betracht kommenden Energieinhalt — dessen Dichte den Druck angibt (376) — nach außen abgeben; es dehnt sich unter steter Kraftwirkung bis zu unendlichem Volum (346). Eine mit Druck versehene Flüssigkeit entlastet sich zwar auch unter Volumzunahme, also unter Arbeitsabgabe, jedoch nur in engen Grenzen. Entsprechend ihrer geringen Kompressibilität (314) nimmt die Flüssigkeit schon bei geringer Volumverminderung, also unter geringem Arbeitsaufwand, hohe Drucke an, und ebenso gibt sie bei der Entlastung auch nur geringe Energiemengen wieder ab.

Die Ursache dieses Unterschiedes gegenüber den Gasen liegt in fast völligem Fehlen der anziehenden Molekularkräfte bei den Gasen und in ihrem Vorhandensein bei den Flüssigkeiten (315, 346). Wenn das Gas sich dehnt, arbeitet es fast nur gegen äußere Kräfte; wenn dagegen eine Flüssigkeit sich dehnt, geht ein großer Teil ihres Energieinhaltes auf Arbeit gegen die Molekularkräfte; dieser Teil fehlt dann in der für Druckwirkung verfügbaren Energiemenge und daher auch in der Dichte dieser Energie, d. i. am Drucke (376). Daher das schnelle Herabsinken des Druckes bei Entlastung von Flüssigkeiten.

Dampfkessel werden dementsprechend nie mit Dampf oder Druckluft einer Druckprobe unterworfen; denn bei etwaigem Platzen würden große, gefährliche Arbeitsmengen vom Gasinhalt auf die Bruchstücke übertragen. Man füllt sie voll Wasser und pumpt Wasser nach, bis der gewünschte hohe Druck entsteht. Erfolgt dann ein Riß, so tritt bloß ein wenig Wasser aus, worauf alles sofort wieder im Gleichgewicht ist.

380. Der hydraulische Widder ist ein eigenartiger Wassermotor zum Heben von Wasser. Er läßt einen Teil des ihn treibenden Wassers sinken, um den anderen Teil zu heben. Es bewegen sich in ihm außer Wasser nur Ventile. Das verfügbare Wasser läuft aus dem Behälter B (Abb. 99) erst durch ein nicht zu kurzes Rohr R ein Stück nach abwärts zu einem Ventil V_1, wo es ausströmen kann. Dabei drückt es das Ventil zu und versperrt sich so den Weg. Durch die plötzliche Geschwindigkeitsverminderung des Wassers im Rohr R entsteht großer Druck (375), und dies wird ausgenutzt. Der große Druck öffnet das Ventil V_2 (in der Abbildung als einfache Klappe gezeichnet) und fördert das Wasser ins Steigrohr H höher hinauf als von wo es gekommen war. Die in L abgesperrte Luft wirkt dabei als elastisches Kissen, das unnötig hohen Druck hinter V_2 vermeidet und den Hebungsvorgang des Wassers gleichmäßiger macht. Nach Vollendung des beschriebenen Ablaufs fällt das nun genügend ent-

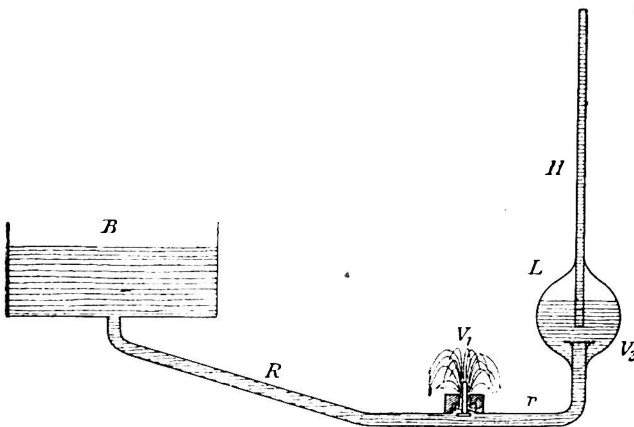


Abb. 99. Hydraulischer Widder.

lastete Ventil V_1 wieder herab, und es beginnt die Wiederholung desselben Ablaufs, der jedesmal eine bestimmte Wassermenge in einen am oberen Ende von H gelegenen höheren Behälter fördert.

Daß vorhandener Wasserdruck hier beliebig vermehrt werden kann, ist leicht einzusehen, wenn man nach Galileis und Newtons Grundgesetz (Gl. 115 oder 116a) bedenkt, daß die Kraft, welche die bewegte Wassermasse in R zur Ruhe bringt, und damit auch die Gegenkraft, welche sie dabei ausübt, beliebig hoch gesteigert werden kann, wenn die Zeit, in welcher diese Geschwindigkeitsänderung erfolgt, d. i. die Schließungszeit des Ventils V_1, beliebig verkürzt wird. Mit der Kürze dieser Zeit und der Masse des bewegten Wassers in R wächst die Kraft, welche auf das sich schließende Ventil V_1 ausgeübt wird und damit auch der Druck auf dasselbe, welcher dann im ruhenden Wasser in r sogleich bis V_2 sich fortpflanzt (298) und dort das Weitere bewirkt.

Auch das Verwunderliche im Endergebnis, daß hier Wasser sich selbst hebt, ist zu verstehen: der Gesamtschwerpunkt des Wassers sinkt, wie stets bei Wirkung von Schwere (110), indem notwendigerweise viel Wasser am tiefsten Punkte, durch V_1, entweichen muß. Man berechnet nach dieser Notwendigkeit des Sinkens des Schwerpunktes oder auch aus dem Energiegesetz leicht, welches der äußerste mögliche Bruchteil des Wassers ist, der bei gegebenen Höhenlagen gehoben werden kann.

Fließen unter wesentlicher Mitwirkung der Reibung, und Allgemeineres über Flüssigkeits- und Gasbewegungen.

381. Beharrende (stationäre) und veränderliche (nichtstationäre) Bewegungsvorgänge. — Es fließe aus dem Behälter B (Abb. 100) Wasser durch das Rohr Rr aus. Die 4 senkrechten Rohre s könnten für jetzt abwesend sein; sie stören übrigens das Fließen in Rr nicht. Die Wasserhöhe in B setzen wir als gleichbleibend voraus, sei es durch Nachfüllung oder durch sehr große Breite von B.

Solange die Öffnung r noch verschlossen ist, ruht das Wasser in Rr; vom Augenblick des Öffnens tritt beschleunigte Bewegung im Rohre ein, bis nach kurzer Zeit eine dann gleichbleibende Endgeschwindigkeit erreicht ist (s. 384). Man hat dann einen beharrenden (stationären) Bewegungsvorgang in der Flüssigkeit, bei welchem an jeder Stelle dauernd die gleiche Geschwindigkeit vorhanden ist. Wir werden meist von der Betrachtung beharrender Vorgänge ausgehen, die einfacher sind als die nichtstationären.

Verglichen mit dem früher untersuchten Falle des Ausflusses aus einer Öffnung in dünner Wand, ohne Rohr (369, Abb. 95), hat man hier wie dort anfängliches Anwachsen der Ausflußgeschwindigkeit; jedoch muß die stationäre Endgeschwindigkeit hier wegen der Reibung im Rohre geringer sein als sie nach Torricellis Satz berechnet würde. Was hier an kinetischer Energie der ausströmenden Flüssigkeit fehlt ist in der Energieform der Reibungswärme in ihr enthalten (vgl. 375, 376).

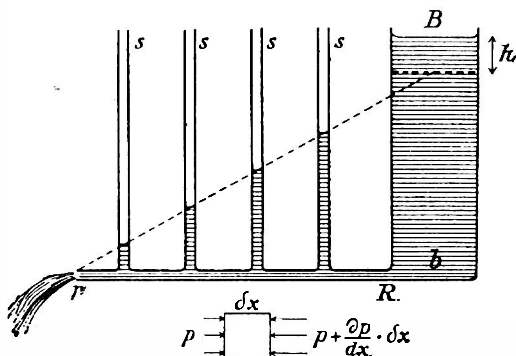


Abb. 100. Fließen mit Druckgefälle.

382. Bei inkompressibeler Flüssigkeit (vgl. 314) muß in der ganzen Rohrlänge Rr, bei überall gleichem Querschnitt derselben, gleiche Ge-

schwindigkeit sein. Denn strömten durch zwei der Querschnitte gleichzeitig verschiedene Flüssigkeitsmengen, so würde dazwischen eine Häufung oder Minderung der Flüssigkeitsmenge stattfinden, was bei der mit der Inkompressibilität verbundenen unveränderlichen Dichte nicht möglich ist[1]). Grenzen Rohre verschiedenen Querschnitts aneinander, so müssen aus gleichem Grunde die Geschwindigkeiten in ihnen verkehrt proportional den Querschnitten sein[2]).

Ganz allgemein muß in jedem Raumteil, der von inkompressibeler Flüssigkeit durchströmt wird, in gleichen Zeiten ebenso viel Flüssigkeit eintreten als aus ihm austritt. Danach müssen die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit rings um jeden Raumteil sich einrichten.

Für Flüssigkeiten kann oft genügend zutreffend Inkompressibilität angenommen werden, nicht aber für Gase (314, 362). Letzteres macht Gasbewegungen im allgemeinen verwickelter als Flüssigkeitsbewegungen.

383. Druckgefälle. — Die an dem Rohr Rr (Abb. 100) angebrachten, oben offenen 4 Steigrohre s dienen als Druckzeiger. Die Höhe der Wassersäule in jedem derselben muß stets Maß sein für den an ihrem Fußpunkte vorhandenen Druck; denn das Wasser ruht in den Rohren und ihre Öffnungsflächen sind unten streifend zur Bewegungsrichtung im Rohr Rr gerichtet. Ist die Mündung r noch verschlossen, so steht das Wasser in allen 4 Druckzeigern und auch im Behälter B gleich hoch, entsprechend dem für ruhende Flüssigkeiten geltenden Satze (306). Sobald r geöffnet ist, stellt sich in kurzer Zeit mit dem beharrenden Bewegungszustande (381) die in der Abbildung dargestellte Druckverteilung ein, die dann auch beharrend ist. Man nennt eine solche Druckverteilung ein Druckgefälle. Das Maß für das Gefälle ist der Druckunterschied ins Verhältnis gesetzt zur Strecke, auf welcher er statthat. Die punktierte Gerade in Abb. 100, welche die oberen Enden der Flüssigkeitssäulen in den Rohren s verbindet, zeigt an, daß das Druckgefälle im ganzen Rohr Rr von einheitlicher Größe ist; der Druck fällt auf gleicher Strecke überall um gleich viel. Unter dem Rohr ist in der Abb. 100 ein würfelförmiges Raumelement der Flüssigkeit im Rohr vergrößert dargestellt mit den Kräften des Druckgefälles. Der kleinen Strecke δx (Dicke des Raumelements) entspricht der kleine Druckunterschied an seinen Enden, dessen resultierende Kraft das Raumelement in der Richtung von R nach r hin treibt. Unter solcher Kraft steht das Raumelement während seiner Bewegung von R bis r.

384. Wirkung der Reibung. — Diese Kraft des Druckgefälles beschleunigt die Masse des Raumelements nach dem Grundgesetz, und zwar muß bei Inkompressibilität die Beschleunigung in der ganzen Länge von R bis r die gleiche sein, weil die Geschwindigkeit jederzeit einheitlich sein muß (382). Es findet aber Beschleunigung nur im nichtstationären Anfangsstadium des Ausflusses statt (381); bei stationärer Bewegung fehlt sie. Die Ursache hiervon ist das Auf-

[1]) Hohlraumbildung in der Flüssigkeit, die durch äußeren Druck (Atmosphärendruck) meist verhindert ist, betrachten wir hier nicht.

[2]) Dabei sind immer durchschnittliche Geschwindigkeiten jeweils über den ganzen Querschnitt gemeint, oder zeiteinheitlich denselben durchströmende Flüssigkeitsmengen. Die Verteilung der Geschwindigkeiten im Rohrquerschnitt untersuchen wir später; die größte Geschwindigkeit ist immer in der Mitte (404).

treten von Reibungskraft, die auch hier, wie bei den festen Körpern, vorhandener Geschwindigkeit entgegenwirkt, und die bei Flüssigkeiten und Gasen stets mit der Geschwindigkeit wächst (403). Es steigt daher die Geschwindigkeit und mit ihr die Reibungskraft so lange, bis letztere der Kraft des Druckgefälles entgegengesetzt gleich geworden ist, wonach die Resultierende aller Kräfte Null und daher, nach dem Grundgesetz, die Geschwindigkeit konstant geworden ist (vgl. 287).

Man sieht, daß die Größe der gleichbleibenden Geschwindigkeit, die sich einstellt, durch Druckunterschied und Reibungskraft gemeinsam bestimmt ist. Es ist diejenige Geschwindigkeit, bei welcher Druckkraft und Reibungskraft einander entgegengesetzt gleich sind. Man sieht jetzt auch, warum der gesamte Druckunterschied an den Enden des Rohres gleichmäßig, in einheitlichem Druckgefälle, über dessen ganze Länge sich verteilen muß: Weil die Geschwindigkeit und damit auch die Reibung überall im Rohre gleich ist, wenn es gleichen Querschnitt hat.

Grenzen Rohre aneinander, die verschiedene Reibungskräfte geben, so müssen sich in ihnen entsprechend verschiedene Druckgefälle einstellen; der größeren Reibungskraft (z. B. in engerem Rohr) wird auch ein größeres Druckgefälle entsprechen.

Daß Reibung die durch Trägheit entstehenden Druckgefälle vermindern muß, wurde bereits bemerkt (376).

Die Besonderheiten der Reibungskräfte in Flüssigkeiten und Gasen betrachten wir weiter unten für sich (400).

385. Besonderes Druckgefälle beim Übergang vom weiten ins enge Rohr. — Man sieht aus Vorigem, daß das ganze Druckgefälle im Rohr Rr (Abb. 100) nur durch die Reibung bedingt ist; ohne die Reibungskraft müßte auch die Kraft des Druckgefälles Null sein, um die gleichbleibende Geschwindigkeit des stationären Zustandes zu geben. Es würde dann von R bis r der am letzteren Punkte vorhandene Atmosphärendruck herrschen, und nur im Inneren des Gefäßes G, etwa von b bis R, würde der Übergang des Überdruckes der Flüssigkeitssäule in G zum bloßen Atmosphärendruck in einem besonderen Druckgefälle stattfinden, wie es bereits bemerkt wurde (371). Daß ein solches Druckgefälle auch hier im Gefäß tatsächlich vorhanden ist, dies zeigt sich an dem Überstehen der Oberflächen in B über die punktierte Linie. Der überstehenden Flüssigkeitssäule h entspricht der Druck, welcher die Flüssigkeitssäule im Gefäß von der Ruhe aus auf die Geschwindigkeit des stationären Ausflusses im Rohre Rr bringt. Es ist dies der ohne Mitwirkung von Reibung schon betrachtete Fall des Überganges aus weitem Rohr ins enge (375). Mit Reibung an der Rohrmündung R geht ein Teil der Druckhöhe h auf Wärmeentwickelung (vgl. 376). Die Kleinheit von h entspricht der nur geringen Ausflußgeschwindigkeit durchs reibunggebende Rohr.

386. Grundgleichungen der Hydrodynamik und Aerodynamik. — Will man Flüssigkeits- oder Gasbewegungen im einzelnen verfolgen und verstehen, so muß man auf die Volumteile der Flüssigkeit eingehen und Galileis und Newtons Grundgesetz auf deren Massen mit Maßgabe der wirkenden Kräfte — Druckgefälle, Reibungskräfte, Schwerkräfte — anwenden. Alle vorbetrachteten Fälle (369—385) bieten Beispiele hiervon. Die allgemeine Durchführung ist in den Grundgleichungen der Hydrodynamik und Aerodynamik geboten, welche das genannte Grundgesetz auf alle einzelnen Volumelemente anwenden; sie sind Differentialgleichungen, weil die Volumelemente für alle Fälle beliebig klein anzunehmen sind. Da die Volumelemente aber nicht unabhängig voneinander sich bewegen können, ist durch besondere Gleichungen noch deren gegenseitige Beeinflussung zum Ausdruck zu bringen. Strömt in irgendeinen Raum-

teil mehr ein als aus, oder umgekehrt, so hat dies Änderung der Dichte in diesem Raumteil zur Folge, und mit der Dichte ändert sich auch der Druck. Der geänderte Druck liefert aber auch wieder geänderte Kräfte für die Nachbarelemente, und danach müssen sich deren Bewegungen ändern. Diese geänderten Bewegungen haben aber ihrerseits wieder geänderte Ein- und Ausströmungen zur Folge, so daß Wirkung wieder Ursache und Ursache dann wieder Wirkung wird. Eben dies Ineinandergreifen der Vorgänge bedingt die Unübersichtlichkeit jedes verwickelteren Bewegungsfalles in Flüssigkeiten oder Gasen, obgleich die allein und erschöpfend maßgebenden Einzelgesetze, welche Ursachen und Wirkungen miteinander verbinden, so einfach sind, wie Galileis und Newtons allgemeines Bewegungsgesetz und Boyles und Mariottes Druck und Dichte verbindendes Gesetz.

Die Gleichungen fassen alle diese Verwickelungen vollständig in sich, so daß bei ihrer vorsichtigen Benutzung nichts übersehen werden kann. Die Benutzung geht allerdings meist an die Grenzen der mathematischen Kunst; sie ist daher nur in vereinzelten Fällen erfolgt (vgl. 388, 396)[1]).

Für die Anwendung auf Sonderfälle können die Gleichungen oft vereinfacht oder stückweise benutzt werden, was aber gleichbedeutend ist mit passender Benutzung der einzelnen, im Vorliegenden bereits entwickelten und erläuterten Sätze oder der Rückkehr zu den Grundgesetzen.

Auf die Diffusion (365) nehmen die Grundgleichungen keine besondere Rücksicht; sie ist bei den Flüssigkeiten auch ein sehr langsamer Vorgang, und bei den Gasen ist sie mit der inneren Reibung (400 u. f.) schon ganz berücksichtigt.

Über die Gültigkeitsgrenzen der Grundgleichungen siehe 411.

Flüssigkeits- und Gasbewegungen in großen Räumen; Strömungslinien und Wirbel.

387. Allgemeines. — In ausgedehnten, mit Flüssigkeit oder Gas erfüllten Räumen sind weiteste Mannigfaltigkeiten von Bewegungsvorgängen möglich. Da die Grundgleichungen zu deren Ermittelung in Sonderfällen meist — wie bemerkt (386) — nicht in Betracht kommen, ist es gut, durch einige, im folgenden zu entwickelnde Überlegungen mit Verwertung allgemeiner Ergebnisse Regeln zu suchen, die für alle Fälle nützlich sind.

Maßgebend für die Bewegung jedes Raumteiles der Flüssigkeit sind:

1) die vorhandenen Drucke, die man zum Teil, soweit von außen her ausgeübt, als vorgegeben betrachten kann und die in vielen wichtigen Fällen einzige Ursache der Bewegung sind[2]);

2) die Trägheit der Flüssigkeit (gemessen durch ihre Dichte D);

3) die Reibung der Flüssigkeit (gemessen durch ihre Reibungskonstante η, 403).

388. Trägheit und Reibung wirken in den Bewegungsvorgängen oft gegeneinander, so daß sie in ihren Wirkungen sich aufheben. Jeder Teil der Flüssigkeit bewegt sich dann in einfachster Weise entlang dem von außen stam-

---

[1]) Anhang V zur Mechanik zeigt das Wesentliche der Gleichungen und gibt weitere Auskunft.

[2]) Die Schwerkraft fällt z. B. im Inneren von Flüssigkeitsmassen beliebiger Größe weg, wenn sie in Gefäßen unterstützt sind (309).

menden Druckgefälle, von Orten höheren Drucks zu Orten niedrigeren Drucks. Trägheit würde zwar, hiervon abweichend, Bewegung auch ohne Druckgefälle fortbestehen lassen; aber Reibung bringt dem entgegen Geschwindigkeit zum Verschwinden. Trägheit läßt neue Druckgefälle im Inneren der Flüssigkeit hinzukommen (375); Reibung vermindert diese Druckgefälle (376). Man sieht, daß Trägheit und Reibung einander in ihren Wirkungen in der Tat in gewissem Ausmaße aufheben können. Dies gilt umso besser, je kleiner die vorkommenden Geschwindigkeiten sind. In solchen Fällen, wo Dichte D und Reibungskonstante η in passendem Verhältnis zu einander stehen und zu große Geschwindigkeiten nicht vorkommen, geht die Bewegung in Strömungslinien[1]) vor sich.

389. Eine Strömungslinie (oder Stromlinie) gibt überall die Richtung der Flüssigkeits- oder Gasbewegung an; ihre Tangente hat in jedem Punkte diese Richtung.

Man kann Strömungslinien in Flüssigkeiten durch darin befestigte Farbpartikel sichtbar machen: Die an einem Farbpartikel vorbeiziehenden Flüssigkeitsteile färben sich und machen dadurch ihren weiteren Weg sichtbar, welcher Weg eben eine Strömungslinie ist. In Gasen ist das gleiche durch kleine Rauchquellen erreichbar.

Im Falle beharrender (stationärer) Bewegung (381) ruhen die Strömungslinien; bei nichtstationärer Bewegung wandern sie oder formen sie sich um.

390. Wir betrachten im folgenden einige Fälle beharrender Flüssigkeits- (oder Gas-)Bewegung in Strömungslinien:

In einem zylindrischen Rohr sind alle Strömungslinien parallel der Achse, wie es Abb. 101 im rechten und linken Teile zeigt[2]). In der Erweiterung des Rohres (Mitte der Abbildung) breiten sich die Strömungslinien entsprechend dem für die Strömung verfügbaren Querschnitt aus. Der Druck nimmt in der Strömungsrichtung wegen Reibung von einem Ende des Rohres zum anderen hin ab (384); darüber lagert sich in der Kugel ein Ansteigen und Wiederabnehmen des Druckes wegen der dort erst (bis zur punktierten Mitte) sinkenden und dann wieder steigenden Geschwindigkeit nach Maßgabe des Satzes 375. Diese zusätzliche Druckverteilung, welche Trägheitswirkung ist, tritt gegen die von außen her stammende um so mehr hervor, je größer die Dichte der Flüssigkeit ist; sie tritt um so mehr zurück, je größer die Reibung der Flüssigkeit ist. Der Druckunterschied der beiden

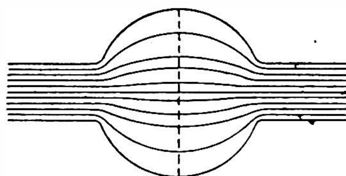


Abb. 101. Strömungslinien in Kugelrohr.

[1]) Diese Bewegung ist, wie jede Flüssigkeitsbewegung in den hydrodynamischen Grundgleichungen (386 und Anhang V) enthalten. Um sie herauszuholen, setzt man Reibung gleich Null und alle Drehgeschwindigkeiten der Volumelemente ebenfalls gleich Null. Es bleiben dann nur mehr fortschreitende Bewegungen aller Volumelemente übrig, und diese gehen in den Strömungslinien vor sich. In einzelnen Fällen waren die Strömungslinien in dieser Weise berechenbar (z. B. Abb. 103, 104), und man kann daher wohl sagen, daß man ihre — oben anzugebenden — allgemeinen Eigenschaften nach den Grundgleichungen, d. h. aus der lückenlosen Zusammenfassung einfacher Grundkenntnisse kennt. Dennoch ist diese Leistung der Gleichungen unbefriedigend. Denn man kann Strömungslinien sehr wohl bei durchaus nicht fehlender Reibung in allen wirklichen Flüssigkeiten, ja sogar bei großer Reibung besonders gut und bis zu ziemlich großen Geschwindigkeiten beobachten (395). Alle Erläuterungen im folgenden, auch zu den nach den Gleichungen berechneten Strömungslinien, beziehen sich auf tatsächlich Beobachtbares.

[2]) Bei allen Abbildungen sind außer den in deren Ebene gezeichneten Strömungslinien auch noch gleichgeformte im Raume hinzuzudenken.

Enden multipliziert mit dem Durchflußvolum gibt die zur Erhaltung des Durchflusses nötige Arbeit an (378); dieselbe wird im Rohr gegen Reibung geleistet und geht dort in Wärme über.

Abb. 102 zeigt in der linken Hälfte (und ohne Pfeile) Strömungslinien einer Flüssigkeit, die aus großem, allseitig eine Rohrmündung r r umgebenden Raum in das Rohr einströmt, der aber auch umgekehrt aus dieser in den flüssigkeitserfüllten Raum hinausströmt, alles für den Fall, daß Trägheit und Reibung ihre Einflüsse gegenseitig vernichten. Die andernfalls in Betracht kommenden, mit Pfeilen versehenen Linien erläutern wir später (393).

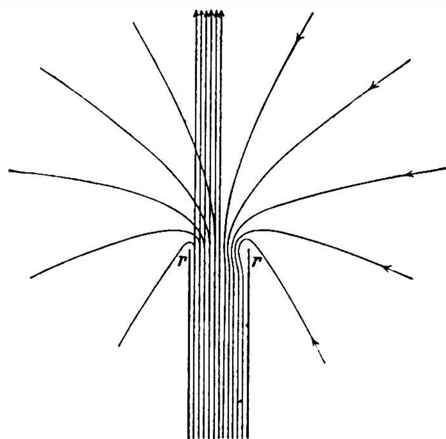


Abb. 102. Rohrmündung in großem Flüssigkeitsraum. Aus- und Einströmng ohne und mit Trägheitswirkuung.

Abb. 103 zeigt die Bewegung einer allen Raum erfüllenden Flüssigkeit, in welcher bei + Einströmung erfolgt, während bei — das gleiche Volum ausströmt. Man sieht hier das Auseinanderweichen benachbarter Strömungslinien, auch ohne daß die Form von Gefäßwänden es bedingte (wie in Abb. 101).

Abb. 104 zeigt die Strömungslinien bei gleichzeitigem Einströmen gleicher Volume an zwei benachbarten (mit + bezeichneten) Orten in einen sehr großen Flüssigkeitsraum.

Endlich sind in Abb. 109 die Strömungslinien für den Fall dargestellt, daß in (unbegrenzt breitem) parallelem Flüssigkeitsstrome ein Hindernis sich befindet, nämlich der punktiert gezeichnete ellipsoidische feste Körper. (Den in der Abbildung gezeichneten Inhalt des ellipsoidischen Raumes betrachten wir später). Man sieht, daß die Strömungslinien rings um das Hindernis zusammengedrängt werden.

391. Man sieht aus den betrachteten Abbildungen im einzelnen verfolgbar folgende **allgemeine Eigenschaften aller Strömungslinien:**

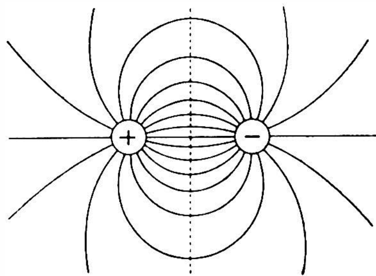


Abb. 103. Strömungslinien um Ein- und Ausströmungsort in großem Flüssigkeitsraum.

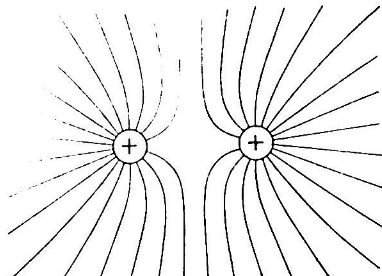


Abb. 104. Strömungslinien um 2 Ein- oder Ausströmungsorte in großem Flüssigkeitsraum.

1) Niemals schneiden sich zwei Strömungslinien. Dies liegt schon in ihrer Definitjon (389), da an jedem Punkte zu jeder Zeit nur einerlei Bewegungsrichtung vorhanden sein kann.

2) Keine Strömungslinie kann Ende oder Anfang anderswo haben als an Orten von Einströmung oder Ausströmung in dem betrachteten Raum. Dies folgt aus der Tatsache, daß nirgends Flüssigkeit oder Gas verschwindet oder neu entsteht.

3) Strömungslinien formen sich stets wie gespannte Fäden, die einander drängen.

Diese wichtigen Sätze erlauben in jedem beliebigen, gegebenen Falle annähernd richtige Strömungslinien fast sofort zu zeichnen, während die hydrodynamischen Grundgleichungen (386) selbst in Vereinfachung ihre Antworten meist versagen.

Als ein besonderes Beispiel für die Geltung von Satz 3 betrachte man nochmals Abb. 103, wo die meisten Strömungslinien (weil gespannt) in die kürzeste Strecke sich zusammenziehen, während aber doch viele (wegen des seitlichen Drängens) weite Umwege machen. Oder Abb. 104, wo die von je einem einzelnen Einströmungsort ausgehenden Strömungslinien voneinander abbiegen müssen, weil sie einander nicht schneiden können und einander auch abdrängen, wodurch die Mitte von Strömungslinien frei wird.

392. Hinzuzufügen ist noch, daß die Strömungslinien nicht nur die Richtung der Geschwindigkeit überall angeben, sondern daß mit ihrer Hilfe leicht auch die Größe der Geschwindigkeit vollkommen dargestellt wird, wenn man die ihrer Form nach durch die drei Sätze gegebenen Strömungslinien auch in passender Zahl einzeichnet, wofür auch schon Satz 3 Anhalt gibt.

Die Zahl ist passend gewählt, wenn die Dichte der Linien — die Zahl der Linien, welche eine ihnen quergestellte Flächeneinheit schneidet — proportional der Geschwindigkeit an der betreffenden Stelle ist. Ist die Zahl der Linien hiernach an irgendeinem Querschnitt der Strömung richtig gewählt, so wird sie zugleich auch überall sonst richtig, wo dieselben Strömungslinien hin reichen, und man hat dort überall die Größe der Geschwindigkeit aus der Dichte der Linien.

Beispielsweise ist im Falle der Abb. 104 von vornherein sicher, daß in großer Ferne von beiden Einströmungsstellen, gleichweit vom Mittelpunkt des Ganzen, die Geschwindigkeit überall gleich groß sein muß, so als wäre bloß eine Einströmungsstelle in der Mitte vorhanden. Danach sind die Strömungslinien außen im großen Umkreis gleichabstehend gezeichnet und in dieser Fülle nach innen fortgesetzt. Man hat dann sogleich das Ergebnis, daß die Abströmung von den beiden Quellenorten + + nach außen hin schneller erfolgt als in ihren Zwischenraum hinein, daß dicht bei den Quellenorten nach außen hin die größten überhaupt vorhandenen Geschwindigkeiten sich finden (größte Dichte der Strömungslinien) und daß in der Mitte zwischen den beiden Quellenorten die Flüssigkeit ruht (keine Strömungslinien dort). Aus letzterem folgt auch (375), daß in der Mitte größter Druck herrschen muß.

In Abb. 103 sahen wir schon die größte Dichte der Strömungslinien auf dem kürzesten Wege durch ihre Spannung begründet (391); längs dieses Weges findet sich auch die größte Strömungsgeschwindigkeit.

In den Abb. 101 und 102 sind die Linien in dem Rohre gleichabstehend gezeichnet; dies ist allerdings nur dann richtig, wenn Reibung fehlt. Reibung macht, wie deren Untersuchung zeigt (404), die Strömung stets in der Rohrachse schneller als am Rande; es hätten also die Linien nahe der Achse etwas näher zusammengerückt werden dürfen.

393. Trägheitswirkungen. — Bei einigermaßen großen Geschwindigkeiten nehmen die Strömungslinien andere Formen an. Sie streben nach möglichst geringer Krümmung, nach Beibehaltung der Bewegungsrichtung, wie es der Trägheit entspricht. Am auffallendsten tritt dies hervor, wo die Gestalt gegebener Begrenzungen besonders große Krümmungen der Strömungslinien bedingen könnte.

So bei dem in Abb. 102 dargestellten Ausfluß aus einem Rohr in den großen Flüssigkeitsraum (vgl. 390). Es kommen hier in der Nähe des Rohrrandes r r

besonders starke Krümmungen der links in der Abbildung (ohne Pfeile) reibungslos und trägheitslos dargestellten Strömungslinien vor. Die Trägheitswirkung ist sehr verschieden, je nachdem der Fall des Ausströmens oder des Einströmens vorliegt:

Beim Ausströmen können die Linien ganz gerade werden, wie es die linke Hälfte der Abbildung mit den Pfeilen zeigt. Die Bewegung setzt sich dann außerhalb des Rohres mitten in der ruhenden Umgebung unverändert fort; es entsteht ein Strahl. Man kann dies sehen, wenn gefärbte Flüssigkeit aus einem Rohr in ungefärbte ausströmt; der Strahl wird hier ganz ohne Oberflächenspannung rein nur durch Trägheit zusammengehalten. Ebenso ist es bei einer aus zylindrischem Rohr brennenden Flamme, die ein sichtbar gemachter Gasstrahl ist.

Im Falle des Einströmens aus dem großen Raum in das Rohr ist eine Krümmungsverminderung nur durch gleichförmigere Verteilung der Krümmung auf eine längere Strecke möglich. Dies ist im rechten Teil der Abb. 102 dargestellt. Es entsteht eine Trägheitseinschnürung dicht bei r r am austretenden Flüssigkeitszylinder. Die Einschnürung bedingt eine Loslösung der Flüssigkeit von der Rohrwand, so daß ein ringförmiger leerer Raum dort entstehen kann, da gleichzeitig infolge der dort sehr gesteigerten Geschwindigkeit (sichtbar an der Zusammendrängung der Strömungslinien, 392) beträchtlicher Unterdruck, ebenfalls als Trägheitswirkung (375), bei der Einschnürung auftritt.

394. Kräfte auf Ein- und Ausströmungsorte. — Eine andere, sehr bemerkenswerte Trägheitswirkung zeigt sich, wenn zwei benachbarte Ein- oder Ausströmungsorte beweglich sind. Die Strömungslinien für diese Fälle finden sich in den Abb. 103 und 104 dargestellt; es gilt Abb. 104, wenn die beiden Orte gleichsinnig sind (beide mit Ein- oder beide mit Ausströmung) und Abb. 103, wenn sie einander entgegengesetzt sind (die eine mit Ein-, die andere mit Ausströmung). Im Falle der Gleichsinnigkeit (Abb. 104) werden die Strömungslinien gerader, wenn die beiden Orte einander näher kommen; wenn sie in einen Ort zusammenfallen, so verschwindet sogar alle Krümmung, da dann überhaupt nur ein Ein- oder Ausströmungsort mit vollkommen gradlinigen Strömungslinien übrigbleibt. Die Folge ist, daß die beiden Orte, wenn beweglich, einander sich nähern müssen; sie zeigen anziehende Kräfte. Im Falle entgegengesetzten Sinnes (Abb. 103) werden die Strömungslinien gerader, wenn die beiden Orte auseinanderrücken; sie zeigen daher abstoßende Kräfte. Die Verwirklichung gelingt am besten nicht bei Dauerströmung, sondern bei hin- und hergehender Strömung. Beide Orte sind dann Kautschukbälle oder Trommeln, die mittels ihres Luftinhaltes (und einer abwechselnd drückenden und saugenden Pumpe) abwechselnd gedehnt und zusammengezogen werden können, wobei sie, in eine große Flüssigkeitsmenge getaucht, abwechsend Flüssigkeit von sich weg und zu sich hin strömen lassen. Ist einer der beiden Orte beweglich (der andere kann fest sein), so merkt man vortrefflich die anziehende Wirkung bei Gleichsinnigkeit, die abstoßende bei Gegensinnigkeit der Bewegungen an den beiden Orten. Die Kräfte sind verkehrt proportional dem Abstandsquadrat[1]). Diese Kräfte erinnern sehr an die elektrischen und magnetischen Kräfte; jedoch, bei diesen zieht Ungleiches sich an, stößt Gleiches sich ab, und hier ist das Umgekehrte der Fall. Diese Nichtübereinstimmung ist eines der Zeichen dafür, daß der Gedanke einer Erklärung der elektrischen und magnetischen Kräfte durch unsichtbare Bewegungen des Äthers, die Flüssigkeits- oder Gasbewegungen ähnlich wären, aufzugeben ist, so sehr er besonders auch durch die Gleichheit der Formen der elektrischen und der magnetischen Kraftlinien mit Strömungslinien nahegelegt war (E 129).

395. Auflösung der Strömungslinien; wirbelnde (tumultuarische) Bewegung. — Steigert man die Geschwindigkeit bei irgend einer in Strö-

---

[1]) Es ist dies sowohl beobachtet als auch aus den Grundgleichungen (386) ersichtlich gemacht.

mungslinien vor sich gehenden Flüssigkeits- oder Gasbewegung genügend, so treten nicht nur die vorbesprochenen Trägheitswirkungen auf, sondern es erfolgt zuletzt stets Auflösung der Strömungslinien. Eine durch Farbstoff sichtbar gemachte Strömungslinie (389) stationärer Bewegung, z. B. in einem Rohr, beginnt bei Steigerung der Geschwindigkeit unruhig zu werden, zu flattern; man sieht sie in verbogene und sich drehende Stücke zerfallen und schließlich zerteilt sich der Farbstoff über den ganzen Rohrquerschnitt, was eine über die Strömung gelagerte Durchmischung der Flüssigkeit anzeigt. Offenbar verfolgen dann die einzelnen, beim Farbpartikel vorbeiziehenden Flüssigkeitsteile nicht mehr fortdauernd gleiche Wege, sondern sie schlagen abwechselnd ganz verschiedene Wege ein. Es ist nicht nur ein Wandern der Strömungslinien eingetreten, wie bei nichtstationärer Bewegung, sondern das Wesentliche ist das Hinzukommen von Drehbewegung wechselnder Gruppen von Flüssigkeitsteilen zu deren fortschreitender Bewegung, wonach die Gesamtbewegung dann überhaupt nicht mehr durch Strömungslinien beschrieben werden kann.

Das Auftreten von Drehbewegung im Flüssigkeitsinneren kann nur Folge von Reibungskräften sein; denn diese allein sind tangential (401), so daß sie Drehmomente auf Raumteile der Flüssigkeit oder des Gases ergeben können, an deren Grenzen sie angreifen. Es muß daher Anlaß zu inneren Drehungen bei jeder Flüssigkeitsbewegung vorhanden sein, die unter innerer Reibung vor sich geht, d. h. bei welcher verschiedene Geschwindigkeiten im Inneren nebeneinander bestehen.

Der Erzeugung der Drehbewegung durch Reibungskräfte steht gegenüber die Erfahrung, daß gerade in Flüssigkeiten mit großer Reibungskonstante η (403) am wenigsten leicht Auflösung der Strömungslinien eintritt. Es ist durch besondere Beobachtungen (meist an Wasser und Luft) festgestellt, daß beispielsweise in Röhren vom Radius R bei der Dichte D noch Strömungslinien bestehen, solange die mittlere Geschwindigkeit im Rohre kleiner ist als etwa $500\eta/DR$ (in cm, gr und sek-Einheiten)[1]).

Sowohl die Entstehung als auch die Abdämpfung von Drehbewegung durch Reibung ist verständlich; doch ist das Ineinandergreifen der beiden Wirkungen nicht geklärt[2]).

Man kann die Auflösung der Strömungslinien in Gewirbel auch an den vorher betrachteten Flüssigkeits- oder Gasstrahlen (393) sehen, wenn man ihre Geschwindigkeit genügend steigert. Der Strahl kommt dann zur Mischung mit seiner ruhenden Umgebung. Der flüssige Zylinder gefärbten Wassers (Abb. 102 linke Seite) wird unregelmäßig, wolkig begrenzt; die glatte Flamme verbreitert sich zackig und beginnt zu rauschen.

Diese Verwirbelung beginnt stets in einiger Entfernung von der Rohrmündung, nicht dicht an derselben, wo doch die Geschwindigkeit am größten ist, woraus man sieht, daß einige Zeit erforderlich ist, bis eine in Strömungslinien mit genügender Geschwindigkeit bewegte Masse ihre Strömungslinien auflöst. Es scheint eine allmähliche Häufung von Schwankungen der Geschwindigkeiten, Dichten, Drucke und infolgedessen auch Temperaturen und Reibungen stattzufinden, bis es zu Drehungen von größeren Raumteilen mit beträchtlicher Winkelgeschwindigkeit kommt. Auch wurden in einigermaßen weiten Röhren schon weit unterhalb der obenge-

---

[1]) Diese Geschwindigkeitsgrenze ist danach bei $R = 1\,\text{cm}$ in Wasser 9 cm/sek, in Luft 75 cm/sek. Bei engen Röhren tritt an Stelle des Faktors 500 sogar etwa 1200 oder mehr. Das Auftreten der Dichte D im Nenner ist begreiflich, da Trägheit das Weiterbestehen einmal gebildeter Wirbel begünstigt, entgegen der im Zähler stehenden Reibung η, die sie abdämpft (vgl. 388).

[2]) Die hydrodynamischen Grunggleichungen (386) haben hierzu noch nichts ausgesagt. Die innere Reibung der Flüssigkeit ist auch an sich ein noch wenig geklärter Vorgang. Einige Bemerkungen im folgenden (auch 397, 405, 411) geben Andeutungen zu einem Verstehen der stets allmählichen Auflösung der Strömungslinien.

nannten Grenzgeschwindigkeit, bei welcher unmittelbar nachweisbare Wirbel auftreten, Bewegungen gefunden, die nicht genau mit bloßem Fließen in Strömungslinien übereinstimmen (405).

396. Geordnete Drehbewegung in Flüssigkeiten und Gasen; Wirbelfäden. — Die soeben betrachtete wirbelnde Bewegung, wie sie gewöhnlich bei Auflösung von Strömungslinien zustande kommt, kann als ungeordnete Drehbewegung der Volumteile bezeichnet werden, was bedeuten soll, daß bestimmt angebbare, dauernde Achsenrichtungen nicht bestehen. Es können aber auch geordnete Drehbewegungen in Flüssigkeiten und Gasen hervorgebracht werden, wobei die Achsenrichtungen benachbarter Teile zu stetig verlaufenden Linien sich zusammenschließen. Man nennt eine solche, im allgemeinen gekrümmte Linie, die überall Drehungsachse ist, Wirbellinie. Die mit einheitlicher Winkelgeschwindigkeit um die Linie sich drehende Masse wird Wirbelfaden genannt. Es ist gelungen, die Eigenschaften von Wirbellinien und die Einzelheiten der Bewegung in Wirbelfäden aus den hydrodynamischen Grundgleichungen (386) zu ermitteln[1].

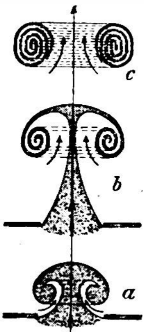


Abb. 105. Entstehender Wirbelring.

Diese Eigenschaften sind ähnlich denen der Strömungslinien: Niemals können zwei Wirbellinien einander schneiden. Niemals endet eine Wirbellinie frei im Inneren von Flüssigkeiten oder Gasen; nur an Grenzen kann sie enden; sie kann aber auch in sich zurücklaufen, einen Wirbelring bilden. Abb. 108 stellt die Bewegungsvorgänge in und um einen gradlinigen Wirbelfaden dar, Abb. 109 gibt dasselbe für einen Wirbelring, beide nach den Grundgleichungen gezeichnet (s. 398).

397. Die Entstehung von Wirbelfäden erfolgt stets durch Reibung in Zusammenwirkung mit Trägheit. Man kann den Vorgang an gefärbtem Wasser beobachten, das man nicht zu langsam, aber nur kurze Zeit in ungefärbtes austreten läßt. Abb. 105 zeigt drei aufeinanderfolgende Augenblicke a, b, c des Vorgangs; Abb. 106 gibt eine schematische Erklärung dazu. Die Flüssigkeit tritt mit der Geschwindigkeit v aus dem Rohr r r; Reibung nimmt die Umgebung mit (v_1), wofür Ersatz seitlich heranströmt (v'_1); zugleich verlangsamt die Reibung den austretenden Strahl (v'), der dadurch seitlich ausgebreitet wird (v''). Dies ergibt zusammen die ringförmig angeordnete Drehbewegung, wobei Strahlflüssigkeit und Umgebung einander aufrollen (was durch Diffusion bald verwischt wird). Der entstandene Wirbelring, kenntlich durch seine Färbung, bewegt sich dann selbständig und ohne weitere Vermischung mit dem ungefärbten Wasser in diesem weiter.

Ebensosehr als Reibung zum Entstehen von Wirbelfäden notwendig ist, ist sie deren Weiterbestehen hinderlich, da sie die Bewegungsenergie des Wirbels in Wärme übergehen läßt[2]. Man kann daher

[1] Dabei wird wieder Reibung gleich Null gesetzt. Man erhält daher Bewegungsverläufe, die um so näher der Wirklichkeit entsprechen, je geringer die Reibung der Flüssigkeit bzw. des Gases ist.

[2] Die Rechnung aus den Grundgleichungen ohne Reibung (s. vorige Note) kann nur fertige Wirbelfäden umfassen, die dann in dieser Rechnung ebenso unerschaffbar als unzerstörbar erscheinen müssen.

Wirbelfäden von einiger Beständigkeit nur in Flüssigkeiten von geringer Reibung haben[1]) und man muß zu ihrer Erzeugung kurzdauernde große Geschwindigkeiten anwenden, welche für die Entstehungszeit große Reibungskräfte geben. Ruckweises Ausstoßen von Flüssigkeit oder Gas[2]) ist daher das Mittel zu einfachster Erzeugung von Wirbelringen. Um sie in Gasen sichtbar zu machen, versetzt man das auszustoßende Gas mit Rauch.

Halbe Wirbelringe in Wasser entstehen beim Rudern; jeder Ruderschlag hinterläßt einen solchen; seine beiden senkrecht zur Wasseroberfläche stehenden Enden sind kenntlich an den Grübchen, welche Fliehkraft dem rotierenden Wasser beibringt. Dasselbe kann im kleinen die Löffelspitze im Inhalt einer Tasse hervorbringen.

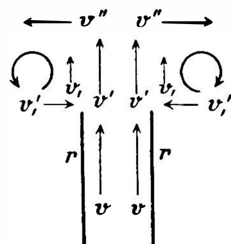


Abb. 106. Entstehender Wirbelring (schematisch).

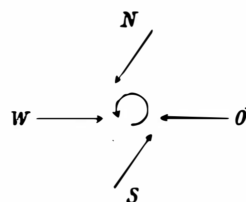


Abb. 107. Wirbelfaden in der Erdatmosphäre (Nordhalbkugel).

Gradlinige Wirbelfäden in großem Maßstab kommen als Wirbelstürme („Windhosen") in der Erdatmosphäre vor; sie stehen senkrecht zur Erdoberfläche und bilden sich unter dauernder Energiezufuhr, wenn Luft allseitig einer Stelle niedrigen Drucks (barometrisches Minimum) zuströmt. Die von Norden und Süden kommenden Luftmassen haben wegen der Erddrehung (auf der nördlichen Halbkugel) Nordost- bzw. Südwestbewegung relativ zur Erdoberfläche (vgl. Abb. 107), was eine linksgerichtete Drehung der zusammenströmenden Luftmasse ergibt (auf der südlichen Halbkugel rechts gerichtet). Die außen geringe Winkelgeschwindigkeit wird gegen den Mittelpunkt des Zusammenströmens hin nach dem Flächensatz (233) sehr gesteigert und trotz Reibung dauernd hoch erhalten, solange das Zusammenströmen dauert, was durch Abfluß von der Mitte nach oben hin ermöglicht ist. So kann die einem wohlausgebildeten Wirbelfaden nach den Grundgleichungen (386) zugehörige Geschwindigkeitsverteilung (Abb. 108) entstehen (überlagert außen von radialen, innen von aufsteigenden Strömungen). Diese Wirbelstürme reichen nicht hoch, weil oben die Dichte, nicht aber die Reibung der Luft verringert ist (407, vgl. 397 Note 2).

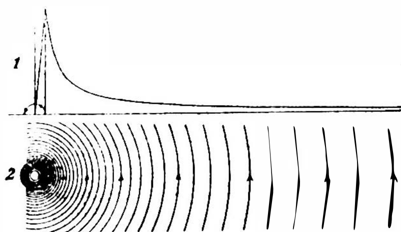


Abb. 108. Wirbelfaden.
1 Geschwindigkeits-Verteilung,
2 Strömungslinien.

---

[1]) Da große Masse dem Wirbelfaden große Bewegungsenergie mitgibt, kommt es für die Beständigkeit von Wirbeln auf möglichst großes Verhältnis von Dichte zu Reibung, D/η, an. Man vgl. damit den umgekehrten Fall der Strömungslinien, für deren Beständigkeit das Reziproke, η/D, möglichst groß sein muß (395).

[2]) Am besten aus einer Öffnung in dünner Wand, weil dann die Trägheitseinschnürung (393) günstig mit irkt (vgl. Abb. 102).

398. Bewegungsvorgänge in Wirbelfäden. — Abb. 108 zeigt im unteren Teil die zu einem Wirbelfaden gehörigen kreisförmigen Strömungslinien in einer Ebene senkrecht zum Faden. Die Dichte der Linien (392) gibt auch die im oberen Teil besonders dargestellte Geschwindigkeitsverteilung. Der Wirbelfaden selbst findet sich im Inneren des oben durch einen Halbkreis gekennzeichneten Raumes. Man sieht, daß die größten Geschwindigkeiten am äußeren Umfange des Fadens vorkommen, daß aber die weiteste Umgebung mitrotiert. Das Innere des Fadens rotiert als Ganzes mit einheitlicher Winkelgeschwindigkeit; außen nimmt die lineare Geschwindigkeit verkehrt proportional dem Abstand von der Mitte ab. Da hierbei nirgends sehr große Geschwindigkeitsunterschiede dicht nebeneinander vorkommen, ist die Auflösung der kreisförmigen Strömungslinien in Kleingewirbel trotz sehr großer Winkelgeschwindigkeiten des Fadens verhindert. Ähnliches gilt auch für Wirbelringe.

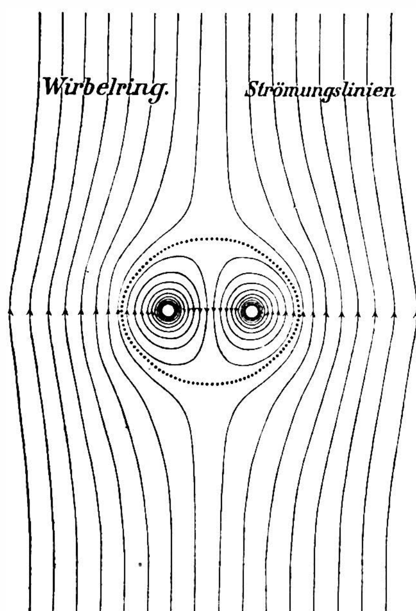


Abb. 109. Wirbelring (und wirbelfreie Strömung um ein Hindernis).

Abb. 109 zeigt die Bewegung in einem Wirbelring, der senkrecht zur Zeichenebene steht und durch sie halbiert wird. Ein solcher Ring ist stets in fortschreitender Bewegung gegen die umgebende Flüssigkeit oder Luft, wobei seine Ebene längs ihrer eigenen Normalen sich verschiebt. Man kann zur Darstellung des Bewegungsverlaufs die Zeichenebene mit dem Ring bewegt annehmen, wie es in der Abbildung auch geschehen ist. Die Umgebung strömt dann gegen den Ring und umgibt ihn dabei wie ein festes Hindernis (390). Alles was zum Ring gehört befindet sich im Inneren des punktiert abgegrenzten ellipsoidischen Raumes. Man sieht, daß an der Äquatorgrenze dieses Raumes außen und innen sehr nahe gleiche Geschwindigkeiten aneinander grenzen, so daß die fortschreitende Bewegung des Ringes nahe reibungslos ist. Innerhalb des Ringraumes kommen nur geschlossene Strömungslinien vor, und die Geschwindigkeiten sind wieder am Rande des Wirbelfadens am größten.

399. Wirbelfäden haben überraschende Eigenschaften, die wohl am deutlichsten an Ringen zu beobachten sind. Sie verhalten sich wie starre Massen — wenn sie auch nur aus Luft bestehen —, die Hindernisse umwerfen. Ein aus elliptischem Loch erzeugter elliptischer Wirbelring macht Schwingungen um die Kreisform, ganz wie ein elastisch verbogener und freigelassener Kreisring aus Draht sie machen würde. Da diese und andere Eigenschaften der Wirbelfäden aus den Grundgleichungen (386) gefolgert werden können, ist es sicher, daß sie in Nichts über die einfachen Grundgesetze aller Bewegung hinausgehen. Sie überraschen aber ebenso wie die Besonderheiten schnell rotierender fester Kreisel (234). In der Tat sind die Wirbelfäden flüssige und gasförmige Kreisel; auch bei ihnen ist die Trägheit schnell bewegter Massen mit den bei Drehbewegung unscheinbar aufgehäuften großen Energiemengen das Wesentliche.

Innere Reibung der flüssigen und gasförmigen Körper.

400. Nur innere Reibung. — Reibung in den beiden nicht festen Aggregatzuständen ist stets innere Reibung, d. h. die Angriffspunkte der Reibungskraft liegen nicht an den Grenzflächen verschiedener Körper, wie bei der gleitenden oder auch rollenden Reibung im festen Zustand (286), sondern im Inneren der

Flüssigkeit oder des Gases. Flüssigkeiten und Gase gleiten überhaupt nicht an festen Körpern[1]) und auch nicht aneinander; man findet beim Durchschreiten von Grenzflächen sowie auch im Inneren von Flüssigkeiten und Gasen keine sprungweisen Geschwindigkeitsänderungen, sondern nur mehr oder weniger große Geschwindigkeitsgefälle. Letztere sind der Sitz der inneren Reibung.

401. *Geschwindigkeitsgefälle.* — Um das für die Reibung maßgebende Geschwindigkeitsgefälle in einem bestimmten Punkte zu finden, sucht man diejenige Richtung senkrecht zur dort vorhandenen Geschwindigkeit auf, in welcher die stärksten Geschwindigkeitsunterschiede vorkommen. So in Abb. 110 die Richtung a b. Dies ist die *Richtung des Geschwindigkeitsgefälles.* Die *Größe* des Gefälles ist das Verhältnis von Geschwindigkeitsunterschied zum Abstand, in welchem er vorkommt. So in Abb. 110 $(v_2 - v_1)/d$[2]).

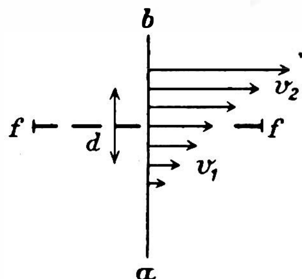


Abb. 110. Geschwindigkeitsgefälle.

402. Die *Reibungskraft* greift stets längs einer Fläche an, die senkrecht zum Geschwindigkeitsgefälle steht. So in Abb. 110 längs der Fläche f f, die dort von der Kante erscheint. Diese *Angriffsfläche* trennt Teile verschiedener Geschwindigkeit, und die schnelleren suchen, durch die Fläche hindurchwirkend, die langsameren zu beschleunigen, so wie durch die Gegenkraft letztere die ersteren zu verzögern suchen. Kraft und Gegenkraft sind auch hier einander gleich und entgegengesetzt gerichtet (209). Die Richtung der Reibungskraft liegt in der Angriffsfläche f f; die Reibungskraft ist somit *eine tangentiale Kraft.* Sie kommt nur in bewegten Flüssigkeiten und Gasen vor; im Inneren ruhender Flüssigkeiten und Gase gab es nur normale Kräfte (295).

403. Was die *Größe der Reibungskraft* anlangt, so könnte sie in einfachster Weise *proportional sein dem Geschwindigkeitsgefälle und der Größe der Angriffsfläche.* Daß dies auch der Wirklichkeit entspricht, haben Messungen an Vorgängen gezeigt, die nach diesen Proportionalitäten berechenbar waren — Fließen in Röhren, drehende Scheiben — und die wir nachher betrachten (404, 406).

Bei gleichem Geschwindigkeitsgefälle und gleicher Fläche ist die Reibungskraft noch vom Stoffe abhängig, was in der *Konstante der inneren Reibung,* η, kurz auch „innere Reibung" genannt, zum Ausdruck kommt. Die innere Reibung η eines Stoffes ist die beim Geschwindigkeitsgefälle Eins auf die Fläche Eins wirkende Kraft (vgl. die Angaben unten in Tab. 11).

Danach ist die Reibungskraft stets durch die drei Faktoren η, Fläche, Geschwindigkeitsgefälle gegeben.

---

[1]) Gleiten von strömender Flüssigkeit, z. B. an Rohrwänden, könnte auch nur erwartet werden, wo die Moleküle von Flüssigkeit und Wand gar keine anziehenden Kräfte aufeinander ausüben, was durch den Randwinkel 180° sich zeigen würde (336).

[2]) Ist der Abstand d nicht zu groß, so wird das Verhältnis unabhängig von der Wahl dieses Abstandes. In jedem Falle kann das Gefälle als Differentialquotient der Geschwindigkeit nach der gegebenen Richtung genommen werden.

404. Fließen mit Reibung in engen Röhren. — Einer der best studierten und auch nach den Grundgleichungen berechneten Reibungsvorgänge ist das Fließen in kreiszylindrischen Röhren, falls es wirbelfrei in Strömungslinien vor sich geht. Die Strömungslinien sind der Rohrachse parallel (390); die Geschwindigkeiten aller Flüssigkeitsteile sind im Beharrungszustand (381) gleichbleibend; an der Wand ruht die Flüssigkeit (400), am schnellsten bewegt sie sich in der Achse; das zu berücksichtigende Geschwindigkeitsgefälle (401) ist hier offenbar längs des Rohrradius gerichtet und muß an jedem der Radien gleichverteilt sein. So viel vorweggenommen ist die Rechnung einfach[1]). Man denkt den ganzen Rohrinhalt in zylindrische Mäntel zerlegt (Abb. 111), die aneinander vorbeigleiten, rechnet zuerst mit einem derselben, um zu sehen wovon seine Geschwindigkeit abhängt, und summiert dann über alle Mäntel, wenn das gesamte Durchflußvolum gefunden werden soll.

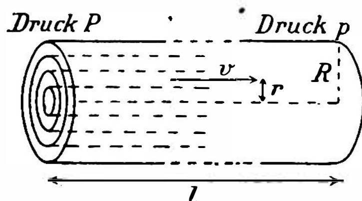


Abb. 111. Fließen mit Reibung in Rohr.

Man findet[2]) das in der Zeiteinheit durchfließende Volum

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P-p}{l} \cdot R^4 . \qquad 404)$$

Dieser Zusammenhang ist eingehend durch Versuche mit vielerlei Rohrradien R, Rohrlängen l und Drucken (P—p) geprüft und bestätigt; ja er war sogar vor der Rechnung aus solchen messenden Versuchen schon festgestellt. Dies ist eine der Proben auf die Richtigkeit der in der Rechnung gemachten Annahmen, vor allem die Abhängigkeiten der inneren Reibung (403) betreffend. Die Probe besteht darin, daß man für dieselbe Flüssigkeit unter allen Umständen denselben Wert für die Reibungskonstante η findet, wenn man sie nach Gl. 404 aus gemessenen Werten von V/t, P—p, l und R berechnet. Dies ist auch eines der **Mittel zur Messung der Reibungskonstanten** beliebiger Flüssigkeiten.

405. Bei solchen Messungen zeigen sich auch die Gültigkeitsgrenzen der Gl. 404. Der Herleitung nach setzt die Gleichung gradlinige Strömungslinien ohne alle Bewegung der Flüssigkeitsteile in Richtung des Rohrradius voraus. Wo Auflösung der Strömungslinien stattfindet (395), d. i. bei zu großen Geschwindigkeiten, kann daher die Gleichung unmöglich gelten. Da die Geschwindigkeit nach der Gleichung proportional der 4. Potenz des Rohrradius ist, also besonders durch diesen Radius stark gesteigert wird, ist die Gültigkeit auf enge Röhren beschränkt.

Daß die Auflösung der Strömungslinien gerade durch die Reibungskräfte bewirkt wird, wurde schon bemerkt (395), und die angegebenen Überlegungen bei der Herleitung der Gl. 404 zeigen auch, wie dies erfolgen muß: Es wird jeder der Flüssigkeitsmäntel (Abb. 111) an seiner inneren Fläche durch die Reibung vorangetrieben, an seiner äußeren aber zurückgehalten, woraus unmittelbar klar ist, daß die einzelnen Raumteile der Mäntel Drehmomente erhalten.

Die Messungen zeigten, daß Abweichungen von der Gl. 404 bei wachsenden Geschwindigkeiten und Rohrradien schon weit früher eintreten als die Auflösung der Strömungslinien unmittelbar merklich wird. So beispielsweise bei Luft schon in Röhren von 1 cm Durchmesser.

---

[1]) Solche vorweg eingeführte Vereinfachungen erlauben es oft, ohne die umständliche Benutzung der umfassenden Grundgleichungen (386) auszukommen, indem man nur den einfachen Sinn von deren maßgebenden Teilen berücksichtigt. Ob oder inwieweit die Vereinfachungen der Wirklichkeit entsprechen, zeigt sich immer bei Benutzung des Ergebnisses der Rechnung.

[2]) Die Rechnung ist im Anhang IV durchgeführt.

Dies zeigt wieder an, was auch schon an Strahlen bemerkt wurde (395), daß die Entwickelung von Wirbelungen ein sehr allmählich beginnender Vorgang ist.

Für äußerst enge Röhren, bzw. sehr verdünnte Gase kommen noch die allgemeinen Gültigkeitsgrenzen der Hydrodynamik in Betracht (411).

406. Durch Reibung gedämpfte Schwingungen. — Ein anderer gut untersuchter Reibungsvorgang in Flüssigkeiten und Gasen findet sich bei Schwingungen. Eine kreisförmige, ebene Platte sei in horizontaler Lage in ihrem Mittelpunkt an einem Drahte aufgehängt, um den sie als Achse Schwingungsbewegungen in ihrer eigenen Ebene ausführt, wenn man sie bei gedrilltem Drahte losläßt. Man kann die Platte in beliebigen Gasen oder auch unter Flüssigkeiten getaucht schwingen lassen und die durch die Reibung in diesen Stoffen verursachte allmähliche Abnahme der Schwingungsweiten[1]) messend verfolgen, woraus wieder die Konstante η der inneren Reibung der Stoffe ableitbar ist. Es sind dazu die Schichtenverschiebungen in der Umgebung der Platte durch Rechnung zu verfolgen, ähnlich wie vorher die Mäntelverschiebungen im Rohre (404), wobei nur die Vorgänge am Rande der Scheibe einige Umstände machen.

In dieser Weise gemessene Reibungskonstanten η stimmen ganz mit den aus dem Rohrdurchfluß (404) ermittelten überein, was eine besonders gute Probe für die Richtigkeit der zugrunde gelegten Vorstellungen von der inneren Reibung ist.

407. Reibungskonstanten von Flüssigkeiten und Gasen. — Tab. 11 stellt einige Reibungskonstanten η zusammen, meist nach Gl. 404 gemessen. Man sieht, daß sehr große Unterschiede vorkommen. Die geringste innere Reibung

Tab. 11. **Innere Reibung η von Flüssigkeiten und Gasen.**

Wasser 0°	0·000018
„ 20°	10
„ 100°	028
„ 150°	018
Methylalkohol CH_4O 20°	062
Äthylalkohol C_2H_6O 20°	12
Propylalkohol C_3H_8O 20°	23
Butylalkohol $C_4H_{10}O$ 20°	4
Quecksilber 20°	15
Blut 20°	0·000045
Rüböl 20°	0·003
Sauerstoff 20°	0·00000021
Atm. Luft 20°	19
Stickstoff 20°	18
Kohlensäure 20°	16
Wasserstoff 20°	093

$\frac{gr}{cm^2}$ beim Geschwindigkeitsgefälle 1 $\frac{cm}{sek}$/cm

[1]) Im Anhang Ib behandeln wir das Hauptergebnis für alle Fälle solcher gedämpfter Schwingungen, nämlich die Amplitudenabnahme und die Beeinflussung der Schwingungsdauer, gefolgert aus dem Grundgesetz der Bewegung.

haben Gase, besonders Wasserstoff; große innere Reibung findet man bei Flüssigkeiten wie Rüböl, die gewöhnlich dickflüssig oder zähe genannt werden. Die Reibungskonstante η ist in der Tat, ihrer Bedeutung nach, das Maß dessen, was man Zähigkeit („Viskosität") nennt. Blut ist zäher als Wasser, was bedeutungsvoll ist für die Arbeit des Herzens[1]), Quecksilber ist nur wenig zäher als Wasser. Bei wachsender Atomzahl gleichgebauter Moleküle steigt die Reibung, wie man an den Alkoholen sieht.

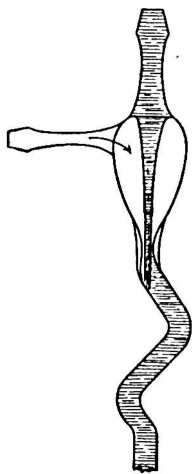
Gemeinsam ist allen Flüssigkeiten das Sinken der Reibung bei steigender Temperatur, wie es die Tabelle für Wasser zeigt. Alle Flüssigkeiten werden dünnflüssiger beim Erhitzen. Sehr bemerkenswert ist das umgekehrte Verhalten aller Gase; sie werden in der Hitze zäher.

Bei den Gasen ist die innere Reibung aus der Betrachtung der Molekularbewegung (W 94) vollkommen verständlich geworden mit ihren sehr bemerkenswerten Eigentümlichkeiten (W 96—98), so auch ihrer Zunahme bei steigender Temperatur und ihrer — ebenfalls vorher unerwarteten — Unabhängigkeit vom Druck (solange die Drucke nicht so hoch werden, daß Molekularkräfte wesentlich zur Geltung kommen, siehe 359).

Bei den Flüssigkeiten ist die innere Reibung wesentlich Folge der Molekularkräfte, sonst aber wenig verstanden.

408. Pumpvorrichtungen, die auf der vom Druck unabhängigen inneren Reibung der Gase und auf dem Haften von Gas an festen und flüssigen Oberflächen beruhen:

In der Wasserluftpumpe (Abb. 112) führt ein Wasserstrahl die angrenzenden Luftschichten solange immer mit sich und dann nach unten als Luftblasen ins abfließende Wasser fort, bis alle Luft weg ist; denn die innere Reibung der Luft, mit deren Hilfe dies geschieht, versagt auch bei schon großer Verdünnung nicht (407). Nur Wasserdampf bringt die Pumpe allerdings unvermeidlich in den auszupumpenden Raum (oder sie läßt Gas vom Drucke des Wasserdampfes in dem Raum übrig), weshalb sie für höchstes Vakuum nicht in Betracht kommt, wohl aber für einfachstes schnelles Wegpumpen der Hauptmenge von Luft.


Abb. 112. Wasserluftpumpe.

Ebenso wie mit dem Wasserstrahl kann auch mit einem Dampfstrahl gepumpt werden. Dies geschieht im „Injektor", einer Druckpumpe zur Speisung von Dampfkesseln. Der Dampfstrahl nimmt das einzupumpende Speisewasser mit sich, verdichtet sich dabei, da das Wasser kalt ist, selbst zu Wasser und schleudert das Ganze in denselben Dampfkessel, aus welchem er gekommen ist. Letzteres scheint verwunderlich; doch ist es klar, daß unter den obwaltenden Umständen der Dampfstrahl leicht einen viel größeren Druck machen kann, als aus welchem er gekommen ist. Das Wesentliche ist die Verdichtung des Dampfes zu Wasser, was ohne Änderung seiner Masse die Dichte und im selben Maße auch den Druck steigert. Denn es ist die Dampfstrahlgeschwin-

[1]) Die zum Durchpressen von Flüssigkeit durch enge Röhren erforderlichen Drucke sind nach Gl. 404 proportional der Konstante η.

digkeit nach Gl. 371 aus dem Kesseldruck zu berechnen, und umgekehrt ist aus dieser Strahlgeschwindigkeit nach derselben Gleichung der Druck zu berechnen, welchen der Strahl hervorbringen kann, wobei aber im ersten Falle das spezifische Gewicht des Dampfes, im zweiten das des Wassers einzusetzen ist, wonach der Druck im Verhältnis dieser beiden spezifischen Gewichte erhöht sein muß. Da dieses Verhältnis leicht weit über 1:100 ist, ist nach dem Schwerpunktssatz (217) einzusehen, daß viel ruhendes Wasser mitgeführt werden kann und doch noch genug Druck übrig bleibt, um das Speiseventil des Kessels zu heben. Übrigens ist auch bei der gewöhnlichen Speisepumpe mit Zylinder und Kolben klar, daß sie wegen des kleinen Volums des Speisewassers im Verhältnis zum großen Dampfvolum gleichen Gewichts nur einen kleinen Bruchteil der im Dampf verfügbaren Arbeit verbraucht (378).

Auch die Diffusionsluftpumpen (367) benutzen teilweise die Mitführung der Luft durch den Quecksilberdampfstrahl, wobei aber doch auch die Diffusion in den Strahl hinein wesentlich mitwirkt.

Die „Molekularluftpumpe" schafft Gas mittels sehr schnell gedrehter Scheiben, an welchen es haftet, aus dem zu entleerenden Raum hinaus.

Alle Luftpumpen, die äußerstes Vakuum herstellen sollen, müssen sehr breite und kurze Verbindungsrohre zum auszupumpenden Raum haben. Denn das Nachströmen der Gasreste aus diesem Raum zur Pumpe erfolgt unter den zuletzt nur mehr sehr kleinen Druckunterschieden, bei nicht entsprechend vermindertem Reibungswiderstand (vgl. 407, 411) so langsam, daß dadurch eine schnelle Wirkung der Pumpe bei langem engem Verbindungsrohr gänzlich vereitelt wird.

Sobald übrigens höchste Gasverdünnungen erreicht sind, kann nicht mehr nach den Gesetzen der Aerodynamik überlegt oder mit deren Gleichungen gerechnet werden, sondern es müssen die Gasmoleküle einzeln bedacht werden. (Siehe die Gültigkeitsgrenzen, 411).

409. Die Bewegung fester Körper in Gasen oder Flüssigkeiten erfolgt stets gegen eine Kraft, deren Ursprung die innere Reibung der Umgebung ist zusammen mit den Drucken, die (nach 375) infolge der Änderungen der kinetischen Energien bei der Massenverdrängung in der Umgebung auftreten. Man nennt diese Kraft den „Widerstand" des bewegten Körpers.

Ist die Geschwindigkeit klein, so kann der Widerstand bei einfacher Form des Körpers mittels der Grundgleichungen (386) aus der Reibungskonstante η berechnet werden. Besonders für bewegte Kugeln ist die Rechnung durchgeführt; es gehört danach zur Geschwindigkeit v beim Kugelradius r der Widerstand

$$6 \pi \eta r v, \qquad 409a)$$

und diese Kraft muß also von außen her auf die Kugel ausgeübt werden, um sie dauernd die Geschwindigkeit v behalten zu lassen. Man sieht, daß die Kraft proportional ist der Geschwindigkeit und dem Radius der Kugel, außerdem der Reibungskonstante η. In einer reibungslosen Umgebung ($\eta = 0$) wäre kein Widerstand vorhanden. Wohl würde die Kugel nach dem Verlauf der Strömungslinien (wie in Abb. 109, s. 390, 392) und dem Satze 375 seitlich ringsum wegen gesteigerter kinetischer Energie Unterdruck und vorn wegen verminderter kinetischer Energie Überdruck haben, aber denselben Überdruck hätte sie wegen des gleichen Verlaufs der Strömungslinien auch hinten, so daß keine Kräfte gegen

die Massenverdrängung der Umgebung übrig bleiben und also beim Fehlen von Reibungskraft überhaupt kein Widerstand vorhanden ist.

Bei nicht kleinen Geschwindigkeiten haben die Drehmomente, welche auch hier die innere Reibung mit sich bringt (vgl. 405), die Folge, daß die Flüssigkeit oder das Gas wirbelnd hinter der Kugel zurückbleibt. Die Rechnung mit dem Ergebnis von Gl. 409a, welche überhaupt nur für kleine Geschwindigkeiten durchgeführt ist, gilt dann nicht mehr. Die Erfahrung zeigt, daß der Widerstand dann proportional dem Quadrat des Radius und dem Quadrat der Geschwindigkeit der Kugel ist. Der Proportionalitätsfaktor enthält dann auch nicht mehr die Reibung η der Flüssigkeit, sondern deren Dichte D, so daß der Widerstand

$$\gamma D r^2 v^2 \qquad 409b)$$

wird, wobei γ nur aus besonderen Messungen, eben an Kugeln, ermittelbar ist. Man findet γ für feste Kugeln in Flüssigkeit oder Gas größer als für flüssige Kugeln (fallende Tropfen) in Gas, was vielleicht daher kommt, daß im letzteren Fall das Kugeläußere mitbewegt wird (ähnlich wie es Abb. 109 beim Wirbelkörper darstellt), was die Wirbelbildung im Gas vermindern muß. Das Auftreten der Dichte D an Stelle der Reibungskonstante η ist Folge des Umstandes, daß bei den schnellen Bewegungen kaum gegen die Reibung, wohl aber gegen die Trägheit der Umgebung gearbeitet werden muß zur Erzeugung der unvermeidlichen Wirbel, die hinter der Kugel zurückbleiben. Die Reibung η ist dann nur für die Geschwindigkeit der Abdämpfung dieser Wirbel maßgebend.

Wo Wirbel bei irgendwelchen Flüssigkeits- oder Gasbewegungen entstehen, geht immer viel Bewegungsenergie verloren; denn alle kinetische Energie der Wirbel geht schließlich in Reibungswärme über.

Für den Übergang von kleinen zu größeren Geschwindigkeiten ist nach besonderen Versuchen der Widerstand als Summe eines Gliedes mit rv und eines mit r^2v^2 darstellbar.

Das Auftreten von v^2 an Stelle von v in der Widerstandsgleichung, sobald Wirbel kommen, zeigt, daß dann der Widerstand bei weiter wachsender Geschwindigkeit sehr stark weiter zunimmt. Will man kleine Widerstände schnell bewegter Körper in Flüssigkeit oder Gas haben, so muß die Wirbelbildung möglichst vermieden werden. Dies kann durch Formung der Körper nach Strömungslinien geschehen, wobei besonders das hintere Ende wesentlich ist, weil dort — nach vorn eingeleiteten Drehungen — die Auflösung der Strömungslinien in Wirbel ihren Hauptsitz hat. So hat z. B. der in Abb. 113 dargestellte, in Pfeilrichtung in Luft bewegte Körper nur $^1/_{25}$ des Widerstandes, den der viel kleinere, in ihm enthaltene, punktiert gezeichnete kurze Zylinder für sich allein, ohne den wirbelvermeidenden Vorder- und Hinterteil geben würde. Dies kommt sehr für Schiffe, Luftschiffe und Flugzeuge in Betracht; Fische und Vögel besitzen von selber geeignete Formen.

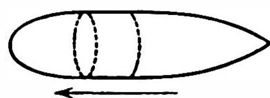


Abb. 113. Wirbelvermeidende Körperform.

Daß bei allergrößten Geschwindigkeiten noch die Druckkräfte von der verdichteten Umgebung vorn und dem dann auftretenden leeren Raum hinten hinzukommen, wurde bereits erwähnt (373).

Man sieht, daß alle Bewegungen in Flüssigkeits- oder Gasumgebung einen mit steigender Geschwindigkeit stark zunehmend steigenden Widerstand erfahren. Fast alle Arbeit der Lokomotiven schneller Eisenbahnzüge wird gegen den Luftwiderstand aufgewendet; die rollende Reibung an den Schienen und auch die gleitende der Achsen in den Lagern wächst nur wenig mit der Geschwindigkeit.

Ist der bewegte Körper vorn und hinten verschieden beschaffen, im Gegensatz zur vorher betrachteten Kugel, wie etwa in Abb. 113, so findet er auch ohne Wirbel einen dem Quadrat der Geschwindigkeit proportionalen

Widerstand, weil dann die von den Geschwindigkeitsänderungen der Umgebung stammenden Drucke vorn und hinten ungleich sind, was bei einiger Geschwindigkeit mehr ausmacht als die Reibung. Diese Drucke (375) hängen nämlich von den Quadraten der Geschwindigkeiten ab (Gl. 374), und sie sind hinten kleiner als vorn, wenn die Umgebung nur vorn am Körper, nicht aber hinten zur Ruhe kommt. Es ist dann der Widerstand, als Produkt aus Druck und Fläche, gegeben durch

$$\omega \cdot \frac{D}{2} v^2 \cdot f, \qquad 409c)$$

wo v die Geschwindigkeit des Körpers relativ zum umgebenden Stoff, f seine quer zur Geschwindigkeit stehende Fläche und ω ein von seiner Form abhängiger Zahlenfaktor ist. Für Konstanz von ω muß aber auch die Form der Strömungslinien um den Körper immer dieselbe sein; treten Wirbel auf, so wird ω sehr viel größer, weil dann an der Hinterfläche des Körpers viel größere Geschwindigkeiten sind.

Zur Berechnung des Widerstandes beispielsweise eines fahrenden Luftschiffes, gegen welchen dessen Motoren arbeiten müssen, untersucht man ein verkleinertes Modell des Luftschiffes in einem Luftstrom bekannter Geschwindigkeit. Hat man die zur Festhaltung des Modells im Luftstrom nötige Kraft gemessen, so ergibt sich nach Gl. 409 c die Konstante ω, die dann auch für das große Luftschiff benutzt werden kann. Welche Abmessung man dabei zur Berechnung der Fläche f benutzt ist gleichgültig, wenn es nur im kleinen wie im großen Maßstabe dieselbe ist, z. B. der Durchmesser des Querschnittes.

Gl. 409 c stimmt überein mit Gl. 409 b, weil bei der Kugel r^2 Proportionalmaß für f ist.

Ist der bewegte Körper rings um die Bewegungsrichtung nicht allseitig gleich geformt, so sind auch die Geschwindigkeiten der Umgebung rings um den Körper und damit auch die Drucke ungleich. Dadurch treten (375) quer zur Bewegungsrichtung stehende Kräfte auf. So an den Tragflächen der Flugzeuge. Diese sind an der Unterseite ein wenig gehöhlt oder auch mit dieser Seite ein wenig nach der Flugrichtung hin gewendet; dadurch wird unten das Vorbeiströmen der Luft verlangsamt (oben bei geeigneter Formung beschleunigt), und dies gibt den Druck nach oben, der das Flugzeug trägt. Dieser Druck ist wieder dem Quadrat der Geschwindigkeit relativ zur Luft proportional. Er wird entsprechend klein bei kleiner Geschwindigkeit; unter einer gewissen Geschwindigkeit gegen Luft kann kein Flugzeug mit Tragflächen (nicht Hubschrauben) oben bleiben. Die Steuerruder der Schiffe und die Steuerungsmittel der Luftschiffe und Flugzeuge wirken ganz ebenso durch Schrägstellungen zur Fahrtrichtung.

410. Es sei hier besonders noch die Fallbewegung in Luft betrachtet. Es ist dabei von der Schwerebeschleunigung g die negative Beschleunigung des Widerstandes zu subtrahieren, welche durch den Quotienten aus diesem Widerstand und der Masse des bewegten Körpers gegeben ist. Wir nehmen ungefähr kugelförmige Körper an. Die Bewegung wird demnach nicht gleichförmig beschleunigt sein, weil der Widerstand von anfänglich Null mit der Geschwindigkeit wächst. Im Anfang der Bewegung kann der Widerstand stets proportional der Geschwindigkeit gerechnet werden (Gl. 409a), und dies bleibt um so länger gültig, je weniger Masse der fallende Körper hat, weil dann die negative Beschleunigung groß wird, so daß dauernd nur kleine Geschwindigkeiten zustande kommen können. Dies trifft zu bei leichten Körperchen von 0·1 mm oder kleinerem Durchmesser, die auch schnell ihre Endgeschwindigkeit annehmen und bei welchen ganz nach innerer Reibung (Gl. 409a) gerechnet werden kann. Bei schwereren Körpern wird bald Gl. 409b allein maßgebend. Am leichtesten ist immer die

Endgeschwindigkeit nach langer Fallzeit zu berechnen; es ist diejenige Geschwindigkeit, bei welcher der Widerstand gleich dem Gewicht des Körpers ist.

Von Interesse sind die Fallgeschwindigkeiten von **Regentropfen**, die wegen der großen verfügbaren Höhen stets nahe der Endgeschwindigkeit sind. Hier tritt bei den größten Tropfen die Besonderheit hinzu, daß sie nicht Kugelform behalten, sondern durch den Druck der Luft unten abgeplattet werden, so daß ihre Geschwindigkeiten überhaupt nur durch besondere Versuche ermittelt werden können. Es zeigt sich, daß die Abplattung und damit auch der Luftwiderstand mit zunehmender Tropfengröße so steigt, daß eine Fallgeschwindigkeit über 8 m/sek bei keiner Tropfengröße zustande kommt. Tropfen von 5·5 mm Durchmesser sind auch die größten, die dauernd bestehen können; bei noch größeren führt die Abplattung zur Zerteilung in kleinere Tropfen. Ist ein aufsteigender Luftstrom von 8 m/sek oder größerer Geschwindigkeit vorhanden, so kann somit überhaupt kein Wasser zur Erde fallen; es schwebt dann in Ruhe relativ zur Erdoberfläche in Tropfen von 4·5 bis 5·5 mm Durchmesser oder wird in kleineren Tropfen nach aufwärts gerissen. Der Wassergehalt der dann immer sehr dunkel aussehenden Wolke kann in dieser Weise sehr groß werden, bis Nachlassen des aufsteigenden Luftstroms den „Wolkenbruch" zur Folge hat. Ist oben die Temperatur unter 0°, so kann das Wasser in Gestalt groß angewachsener Hagelkörner trotz Weiterbestehens des aufsteigenden Luftstroms herunterkommen, weil die Eisstücke nicht zerblasen werden.

Das Zerblasen der großen Regentropfen durch aufsteigende Luftströme kann in dreierlei Weisen vor sich gehen. Beim Aufsteigen der Luft in nahe wirbelfreien Strömungslinien mit konstanter Geschwindigkeit löst sich der Tropfen durch Ausbildung innerer Kreisströmungen, wie in Abb. 109 dargestellt (vgl. 409), in einen Ring auf, der dann in kleinere Tropfen zerfällt. Bei grob wirbelndem Aufsteigen zerfährt der Tropfen unregelmäßig in zwei oder mehr kleinere Tropfen. Bei stoßweisem Aufsteigen wird der Tropfen von unten hohl geblasen wie ein Hut und dann großenteils in feinsten Wasserstaub zerblasen[1]).

Folgendes sind einige Geschwindigkeitsangaben für das Fallen, bzw. Schweben verschieden großer Tropfen:

Tropfendurchmesser	0·01	0·02	0·1	0·5	1·0	2·0	3·0	4·0	4·5	5·5 mm
Geschwindigkeit	0·0032	0·013	0·3	3·5	4·4	5·9	6·9	7·7	8·0	m/sek.

Gewöhnliche, schwebende Wolken und Nebel bestehen aus kleinsten Tröpfchen von wenigen Hundertelmillimeter Durchmesser; man sieht aus der Zusammenstellung, daß schon geringe aufsteigende Luftströme sie im Schweben halten können. Sind in einer Wolke einmal ungleich große Tropfen vorhanden, was immer eintreten muß wenn Zusammenfließen beim Zusammenstoßen von Tröpfchen stattfindet, so beginnt sie auch bald zu regnen, weil die größeren, schneller nach abwärts bewegten Tröpfchen dann auf die kleineren, langsamer fallenden oder gar hinaufgetriebenen stoßen und durch deren Aufnahme sich weiter vergrößern. Dies ist die Art der Ausbildung aller Regentropfen.

411. Gültigkeitsgrenzen der Hydrodynamik und Aerodynamik. — Die Grundgleichungen der Hydrodynamik und Aerodynamik (386) behandeln stets die Bewegungen von Raumelementen der Flüssigkeit oder des Gases, die

[1]) Diese Art von Zerblasung ist elektrisch sehr wirksam (E 134).

in der Rechnung beliebig klein — bis unendlich klein — genommen werden. Dies setzt voraus, daß die Flüssigkeit, das Gas den Raum überall, bis in beliebig kleine Teile gleichmäßig, mit gleichen Eigenschaften erfüllt. Dies ist aber nicht richtig, da alle Körper aus Atomen, Molekülen, mit Zwischenräumen aufgebaut sind. Dies hat die Folge, daß man zu unrichtigen Ergebnissen kommt, wenn man die Gleichungen der Hydrodynamik oder deren Sinn auf zu kleine Räume anwendet.

Alle Räume, innerhalb deren die durch die Rechnung zu verfolgenden Bewegungsvorgänge ablaufen, müssen so groß sein, daß sie noch stark unterteilt werden können, wie es die Rechnung tut, ohne daß man auf einzelne Moleküle oder deren Zwischenräume oder auf die freien Weglängen der Wärmebewegung kommt. Daß die in der Rechnung stets benutzte unendlich weitgehende Unterteilung in allen gewöhnlichen Fällen mangellose Annäherung an die Wirklichkeit gibt, dies ist durch die außerordentliche Kleinheit der Moleküle und meist auch ihrer Abstände und freien Weglängen bedingt.

Wollte man aber beispielsweise Gasbewegungen in Röhren bei sehr niedrigen Drucken berechnen, so müßte man bedenken, daß die von einem Gasmolekül gradlinig zwischen den anderen zurückgelegten Strecken (W 90) bei 1 mm Quecksilberdruck schon etwa 0·1 mm betragen, so daß man dann mit Röhren unter etwa 1 mm Durchmesser nicht mehr sicher rechnen kann. Ebenso können die Bewegungswiderstände von Körperchen unter 0·001 mm Durchmesser (10facher freier Weglänge) in gewöhnlicher Luft oder unter 0·0000003 mm Durchmesser (3fachem Molekülabstand) in Flüssigkeiten (z. B. der elektrolytischen Jonen) nicht zuverlässig hydrodynamisch berechnet werden. Man kann die Grenze der Gültigkeit von Gl. 409a für die Bewegung kleiner Körper in Gasen durch einen, besonderen Beobachtungen entnommenen, Zusatz zur Gleichung erweitern; man kommt aber gerade bei den kleinen Abmessungen in den Gültigkeitsbereich der Gleichungen der kinetischen Gastheorie (W 81), welche das, worauf es dann ankommt, nämlich die Bewegungen der einzelnen Moleküle, in Betracht zieht und welche daher eben dort, wo die Hydrodynamik versagen muß, zuverlässige Rechnung gestattet (W 109).

Selbstverständlich ist es, daß alle Erscheinungen der Molekularbewegung selber, soweit sie nicht in der Dichte und Druck verbindenden Gleichung[1]) enthalten sind, außerhalb des Bereichs der hydrodynamischen Gleichungen liegen. So besonders die Diffusion. Es geht daraus hervor, daß auch der Begriff der Strömungslinien von begrenzter Anwendbarkeit ist. Jede Strömungslinie muß, eine gewisse Strecke weit verfolgt, durch Diffusion auch ohne Wirbelung (an deren Auftreten aber vielleicht auch die Diffusion beteiligt ist, vgl. 395) zur Auflösung kommen. Insofern die Molekularbewegung stets ungeordnet, nur in Durchschnittsangaben berechenbar ist (W 78 u. f.) und als sie bei den Flüssigkeits- und Gasbewegungen stets mitwirkt, werden tumultuarische Bewegungen (395) wohl niemals nach den hydrodynamischen Gleichungen im einzelnen vorausberechenbar sein.

[1]) Gleichung c im Anhang V.

ANHÄNGE
ZUR
MECHANIK

Anhang M I a (zu 166). Einfache (ungedämpfte) Schwingungen, „Sinusschwingungen", berechnet nach Galileis und Newtons Grundgesetz.

Wird der Weg s, d. i. die Elongation (164), in Längenmaß von der Ruhelage aus gerechnet, so muß nach dem Grundgesetz (116a mit 54b) gelten, wenn k die Direktionskraft (167), m die schwingende Masse ist:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{ks}{m}. \qquad 1)$$

Das negative Zeichen ist notwendig, weil bei positivem s positiv gerichtete Geschwindigkeit vermindert wird.

Man sieht, daß es zur Kenntnis der Bewegung darauf ankommt, eine Funktion s der Zeit t zu finden, deren zweiter Differentialquotient ihr selbst proportional ist. Dies ist der Sinus. Man setze also

$$s = S \sin pt. \qquad 2)$$

S als Faktor ist nötig, weil der Sinus keine Länge ist, er also s nicht gleich sein könnte; man sieht, daß S der Höchstwert von s, also die Amplitude sein wird. p muß eine reziproke Zeit sein, weil der Sinus nur von bloßen Zahlen (Winkeln) genommen werden kann; man sieht, daß $2\pi/p$ die Schwingungsdauer T sein muß, weil s bei Vergrößerung von t um $2\pi/p$ wieder zum selben Wert kommt.

Mit dieser Annahme von s als einer Sinusfunktion der Zeit (daher „Sinusschwingung") zeigt sich das Grundgesetz, Gl. 1 in der Tat befriedigt; man erhält bei Einsetzung von 2 in Gl. 1 sogleich $p^2 = k/m$, also die Schwingungsdauer $T = 2\pi\sqrt{m/k}$.

Das Grundgesetz verlangt also eine Sinusschwingung, wenn eine der Elongation proportionale Kraft auf eine Masse wirkt. Dies ist eine allgemein wichtige Einsicht.

Ist die Schwingung drehend, so tritt anstelle des Weges ein Winkel, anstelle von Kraft Drehmoment und anstelle von Masse Trägheitsmoment (vgl. 184 und Tab. 6), ohne daß sonst etwas sich ändert.

Anhang M I b (zu 406) Gedämpfte Schwingungen.

Erfolgt die Schwingung unter dem Einfluß von Reibung, so muß zur rechten Seite von Gl. 1 (Anhang I a) noch die Kraft der Reibung hinzukommen. Reibungskräfte in Gasen oder in Flüssigkeiten (auch magnetische Dämpfungskräfte), die wegen ihrer großen Regelmäßigkeit fast allein für zuverlässige Dämpfung in Betracht kommen, sind bei nicht zu schneller Bewegung proportional der Geschwindigkeit (409), können also gleich $h \cdot ds/dt$ gesetzt werden, und zwar mit negativem Zeichen, weil Reibung stets der vorhandenen Geschwindigkeit entgegenwirkt. Es gibt dann das Grundgesetz anstelle der vorigen Gl. 1:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{ks}{m} - \frac{h}{m}\frac{ds}{dt}. \qquad 1a)$$

Jetzt muß das Integral komplizierter sein als in I a.

Reibung zehrt stets sichtbare Energie zu Wärme auf; es muß daher die Amplitude der Schwingung abnehmen und zwar verlangsamt. Letzteres weil bei kleinerer Amplitude auch die Geschwindigkeit und daher auch die Reibung weniger wird.

Solche verlangsamte Abnahme kann am einfachsten durch eine Exponentialfunktion mit negativem Exponenten (geometrische Reihe) dargestellt werden, die in der Tat in allen solchen und ähnlichen Fällen das Richtige trifft. Man setzt also die Amplitude jetzt $S\,e^{-at}$, wobei a die Geschwindigkeit der Abnahme bemißt. Somit würde anstelle von Gl. 2 (I a)

$$s = S\,e^{-at} \sin pt \qquad 2a)$$

zu versuchen sein. Setzt man dies in 1a ein, so findet man, daß es in der Tat genügt, und zwar für alle Zeiten t, wenn

$$a = \frac{1}{2}\frac{h}{m} \quad \text{und} \quad p^2 = \frac{k}{m} - \frac{1}{4}\frac{h^2}{m^2} = \frac{k}{m} - a^2 \text{ ist.}$$

Die Schwingungsdauer ist wieder $T = 2\pi/p$.

Ist die durch h bemessene Reibung nicht besonders groß, so ist T gegen den reibungslosen Fall ($p^2 = k/m$ in I a) nur sehr wenig geändert (vergrößert); dagegen ist stets auffallend die Amplitudenabnahme. Man berechnet z. B. nach dem hier Gefundenen leicht, daß eine Vergrößerung der Schwingungsdauer um nur $^1/_{10}$ ihres Wertes schon mit einer Amplitudenabnahme auf 0·06 des Anfangswertes während einer einzigen Schwingung verbunden wäre, so daß die nächstfolgende Schwingung schon fast unmerklich würde. Man bemerkt also vom Reibungseinfluß bei einigermaßen andauernden Schwingungen wohl sehr leicht die Amplitudenabnahme, kaum aber eine Vergrößerung der Schwingungsdauer. Messende Verfolgung der Amplitudenabnahme liefert a und damit auch das Reibungsmaß h.

Ist die Reibung sehr groß, so daß p der Null sich nähert, so finden keine Schwingungen mehr statt, sondern nur langsame Bewegung gegen die Gleichgewichtslage („aperiodischer Zustand“).

Anhang M II (zu 182) Berechnung eines Trägheitsmomentes M. Dünner Stab mit der Achse an einem Ende, wie a in Abb. 37. L Länge, m Gesamtmasse des Stabes.

Nach Definition (181) ist $M = \Sigma \mu r^2$, worin r von 0 bis L zu gehen hat und μ die zu r gehörige Masse ist.

Wir zerlegen den Stab in Längenelemente dr, die zugleich Volumelemente sind. Die Masse der Längeneinheit des Stabes ist m/L, die Masse μ eines Volumelementes ist also (m/L) dr. Damit wird

$$M = \int_0^L \frac{m}{L}\,dr \cdot r^2 = \frac{m}{L}\int_0^L r^2\,dr = \frac{m}{L}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^L = \frac{m}{L}\frac{L^3}{3} = \frac{1}{3}\,m\,L^2 .$$

Anhang M III (zu 363) Druckverteilung in der Erdatmosphäre. Es ist (Gl. 301)

Druckstufe = Höhenstufe · spezifisches Gewicht,

d. i. $\quad dp = -\,dh \cdot s.$

Das Zeichen ist negativ, weil mit wachsendem h p abnimmt.

Für die Umrechnung des spezifischen Gewichts ist (nach Boyles und Mariottes Gesetz, 363) $s = s_0 p/p_0$. Daher wird

$$dp = -\,p \cdot \frac{s_0}{p_0}\,dh .$$

Dies ist die Differentialgleichung der Druckverteilung; das Integral ist

$$p = p_0\,e^{-\frac{s_0}{p_0}h} ,$$

wovon man sich durch Einsetzen überzeugt.

Der Druck nimmt also vom Anfangsdruck p_0 bei $h = 0$ nach einer Exponentialfunktion ab (d. i. nach geometrischer Reihe)[1].

Ist die Temperatur 0^0, so ist $s_0 = 0{\cdot}0013$ gr/cm³ (Tab. 2) bei $p_0 = 1$ Atm = 1000 gr/cm², daher $s_0/p_0 = 0{\cdot}13$/km und also

$$p = e^{-0{\cdot}13h} \text{ Atm mit h in km.}$$

Es wird $p = \frac{1}{2}$ Atm bei $h = 5{\cdot}3$ km.

Für Mitwirkung von Temperaturunterschieden der Höhen kommt Anhang W II in Betracht.

Ein Gas von geringerem spezifischen Gewicht s_0/p_0 (kleinerem Molekulargewicht, W 88) würde entsprechend langsameren Druckabfall zeigen; so würde Wasserstoff erst in $14{\cdot}5 \cdot 5{\cdot}3$ km Höhe auf halben Druck kommen. Bei einem Gemisch mehrerer Gase (wie es die Erdatmosphäre tatsächlich ist) würde jedes Gas seinen eigenen Druckabfall als Anteil am Gesamtdruck zeigen, als wäre es allein vorhanden, weil die Molekularbewegung jedes Gases durch die Moleküle der anderen Gase nur wie durch gleich temperierte Gefäßmolekule beeinflußt wird. Es würde also die Luft oben ein Überwiegen der leichteren Bestandteile zeigen. Doch verhindert das die ständige Durchmischung der Erdatmosphäre durch auf- und absteigende Strömungen in den erreichbaren Höhen.

Auf einem Himmelskörper mit n-facher Gravitation würde der Druckabfall n-mal schneller sein. Bei $n = 10^6$ käme man schon in Stufen von 5·3 mm Höhe auf halben Luftdruck. Solche Vervielfachung von Schwerewirkung kommt in schnellst rotierenden Zentrifugen vor (M 202), die somit eine Sonderung von Bestandteilen verschiedenen spezifischen Gewichts schon in sehr kleinen Räumen bewirken, falls Strömungen ausgeschlossen sind[2].

Anhang M IV (zu 404) Fließen mit Reibung in zylindrischem Rohr.

Auf jeden Flüssigkeitsmantel (Abb. 111) von der Dicke dr wirkt 1) der Druckunterschied $P - p$ an den beiden Enden und 2) die Reibung an seiner inneren und äußeren Fläche. Der Druckunterschied gibt die Kraft (257) $(P - p) \cdot 2r\pi\, dr$. Die Kraft der Reibung an einer der Mantelflächen ist (403) $\eta \cdot 2r\pi\, l \cdot (dv/dr)$; auf den ganzen Flüssigkeitsmantel wirkt nur der Unterschied der Reibungskräfte innen und außen, d. i.

$$\frac{d}{dr}\left(\eta \cdot 2r\pi l \frac{dv}{dr}\right)dr\ .$$

Diese Reibungskraft muß im beharrenden Zustande gleich sein der Kraft des Druckunterschiedes, also (nach Kürzung)

$$\frac{P - p}{l\eta}\, r = \frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right),$$

wodurch der Zusammenhang von v und r gegeben ist.

Das Integral hiervon, welches auch den Bedingungen genügt, daß $v = 0$ bei $r = R$ und $dv/dr = 0$ bei $r = 0$ (Ruhe an der Wand und Maximum von v in der Mitte), ist

$$v = \frac{P - p}{l} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{R^2 - r^2}{4}\ .$$

Die Strömungsgeschwindigkeit hat also parabolische Verteilung über den Rohrdurchmesser.

---

[1]) Die Exponentialfunktion tritt immer auf, wenn die Änderung einer Größe ihr selbst proportional ist, wie hier in der Differentialgleichung dp proportional p ist.

[2]) Man läßt scheinen, auf diesem Wege Molekulargewichtsbestimmungen in Flüssigkeiten erreicht zu haben (für die aber Avogadro's Satz nicht gilt).

Das ganze Durchflußvolum in der Zeiteinheit ist

$$\int_0^R v \cdot 2r\pi dr = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{P - p}{l} \cdot R^4 .$$

Anhang M V (zu 386 und 272) Grundgleichungen der Hydrodynamik und Aerodynamik.

1. Diese Gleichungen enthalten keinen anderen Sinn als den von Galileis und Newtons Grundgesetz aller Bewegung (116):

$$b = K/m \quad \text{oder} \quad bm = K. \qquad 1)$$

Hinzuzunehmen sind die Kenntnisse von den zur Wirkung kommenden Kräften K und von einigen besonderen Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase.

Man benutzt verschiedene Umformungen des Grundgesetzes, um es zur Anwendung auf diesen oder jenen Fall einzurichten.

Sowohl die Beschleunigung b als auch die Kraft K ist gesondert in ihren drei Komponenten nach den drei Raumkoordinatenrichtungen zu betrachten (45), was dem Grundgesetz die Gestalt von drei einander vollkommen analogen Gleichungen gibt.

Man betrachtet ein beliebig herausgegriffenes Flüssigkeitselement, das zur Zeit t die Größe $\delta x \delta y \delta z$ und die Koordinaten x, y, z habe. Die x-Komponente seiner Beschleunigung b ist dann d^2x/dt^2.

Die auf das Flüssigkeitselement wirkende Kraft K kommt in einer Flüssigkeit — und es gilt hier auch alles für Gase — vor allem stets vom Druck p, welchen das Flüssigkeitselement von seinen 6 Nachbarn erfährt. Es ist aber nicht der Druck p an sich, der eine resultierende Kraft K auf das Flüssigkeitselement liefert; allseitig gleicher Druck würde die Resultierende Null ergeben[1]) und nur das Volum des Flüssigkeitselementes beeinflussen, was nachher gesondert zu berücksichtigen ist (3). Sondern es ist das Druckgefälle, welches die Kraft K bestimmt (vgl. 383). Die x-Komponente dieses Gefälles ist $\partial p/dx$[2]), wovon auf die Erstreckung δx des Flüssigkeitselementes der einseitige Überdruck $(\partial p/dx) \cdot \delta x$ entfällt (vgl. dazu den unteren Teil der Abb. 100). Dieser Überdruck, multipliziert mit der Fläche $\delta y \delta z$, auf welche er wirkt, gibt die Kraftkomponente in x Richtung

$$-\frac{\partial p}{dx} \delta x \delta y \delta z .$$

Das negative Zeichen ist notwendig, weil ein positives $\partial p/dx$ (nach der positiven Seite von x wachsender Druck) stets negativ gerichtete Kraft gibt.

Damit wird das Grundgesetz (Gl. 1 oben), da bei der Dichte D der Flüssigkeit die Masse des Flüssigkeitselements $m = D \cdot \delta x \delta y \delta z$ ist,

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cdot D\, \delta x \delta y \delta z = -\frac{\partial p}{dx} \delta x \delta y \delta z ,$$

$$\left.\begin{aligned} \text{oder} \quad & \frac{d^2x}{dt^2} \cdot D = -\frac{\partial p}{dx} , \quad \text{und dazu noch} \\ \text{ebenso} \quad & \frac{d^2y}{dt^2} \cdot D = -\frac{\partial p}{dy} \\ \text{und} \quad & \frac{d^2z}{dt^2} \cdot D = -\frac{\partial p}{dz} . \end{aligned}\right\} \qquad a)$$

---

[1]) Vgl. zu dieser Kraftzusammensetzung an einem Flüssigkeitsvolum die Note zu 300.

[2]) Das runde Zeichen ∂ (Zeichen der partiellen Differentiation) soll bedeuten, daß hier nur die zu gegebener Zeit t stattfindende räumliche Verteilung von p in Betracht kommt, nicht auch zeitliche Änderung von p.

Hierin sind sowohl x, y, z, welche die Lage des betrachteten bewegten Flüssigkeitselementes bestimmen, als auch der Druck p, in seiner durch die 3 rechten Seiten dargestellten Verteilung in der Umgebung des Flüssigkeitselements, als aber auch die Verteilung der Dichte D der Flüssigkeit, als Funktionen der Zeit t mit einander in Verbindung gebracht.

2. Es sind nun noch zu den rechten Seiten der Gleichungen a die anderen Kräfte hinzuzufügen (ebenfalls bezogen auf die Volumeinheit), die außer dem Druckgefälle auf die Raumelemente der Flüssigkeit wirken. Hierher gehört vor allem die Schwerkraft, falls man sie nicht im Inneren der Flüssigkeit als aufgehoben betrachtet durch die von ihr hervorgebrachte besondere Druckverteilung (309) und somit samt dieser wegläßt. Außerdem wird aber stets die Reibung im Inneren der Flüssigkeit wirken, als tangentiale Kraft neben der normalen des Druckes p; ihre Größe ist erfahrungsmäßig richtig in der unter 403 angegebenen Weise einzusetzen, was allerdings das Geschwindigkeitsgefälle, und zwar dessen räumliche Änderung, in die Gleichungen bringt und sie dadurch ziemlich verwickelt macht[1]).

3. Die so vervollständigten 3 Gleichungen a genügen aber noch nicht für die 5 Unbekannten x, y, z, p, D, um sie als Funktionen der Zeit festzulegen; es sind noch 2 weitere Gleichungen erforderlich.

Eine derselben bringt — in durchaus notwendiger Weise — den Gedanken hinzu, daß Dichten und Geschwindigkeiten im Inneren der Flüssigkeit nicht unabhängig voneinander verteilt sein können. Es muß in jedem Raumteil, der Einströmung erhält, die Dichte gleichzeitig entsprechend wachsen, und bei Ausströmung muß sie sinken, so daß nur Wanderungen von Massen der Flüssigkeit stattfinden ohne Änderung von deren Größe[2]). Dies gibt, auf ein Raumelement dxdydz in der Flüssigkeit angewandt, die geeignete Gleichung:

Es seien u, v, w die 3 Komponenten der Geschwindigkeit der Flüssigkeit an der Stelle des betrachteten Raumelements zur Zeit t, so daß $u = dx/dt$, $v = dy/dt$, $w = dz/dt$. Das Produkt $u \cdot D$ hat dann die Bedeutung der in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit in x-Richtung strömenden Flüssigkeitsmasse. Es strömt daher in das betrachtete Raumelement in der Zeit dt in x-Richtung ein die Masse $uD \cdot dydz \cdot dt$. Subtrahiert man davon die gleichzeitige Ausströmung auf der entgegengesetzten Seite, so erhält man die Massenvermehrung in der Zeit dt von seiten der u-Strömung, nämlich:

$$-\frac{d}{dx}\,(uDdydzdt)dx = -\frac{d(uD)}{dx}\,dxdydzdt\,.$$

Die gesamte Massenvermehrung im Raumelement in der Zeit dt, von allen 3 Strömungsrichtungen, enthält noch die beiden anderen, gleichartigen Summanden.

Die Masse im betrachteten Raumelement ist aber Ddxdydz und ihre Änderung während dt muß daher auch sein

$$\frac{dD}{dt}\,dxdydzdt\,.$$

---

[1]) Man findet in den gebräuchlichen Darstellungen die innere Reibung der Flüssigkeit in wenig durchsichtiger Weise auf dem Umwege über die (ebenfalls nur das Grundgesetz bedeutenden) Gleichungen elastischer fester Körper (s. 6, w. u.) in die hydrodynamischen Gleichungen eingeführt, indem man sie in Analogie setzt zu der, allerdings ebenfalls tangentiale Kräfte ergebenden Torsion der festen Körper.

[2]) Dies ist nicht genau richtig; denn durch Druck beschleunigte Massen werden um die Masse der zugeführten kinetischen Energie vergrößert. Aber diese in den hydrodynamischen Gleichungen nicht enthaltenen Massenänderungen sind äußerst gering (E 481).

Die Gleichsetzung der in den beiden verschiedenen Weisen festgestellten Massenänderung liefert die gesuchte Gleichung

$$\frac{d(uD)}{dx} + \frac{d(vD)}{dy} + \frac{d(wD)}{dz} = -\frac{dD}{dt}. \qquad \text{b)}$$

Die fünfte, noch erforderliche Gleichung ist dadurch gegeben, daß die Dichte D stets gesetzmäßig zusammenhängt mit dem Druck p:

$$D = f(p). \qquad \text{c)}$$

Bei Flüssigkeiten ist dieser Zusammenhang durch die Kompressibilität gegeben, bei Gasen durch Boyles und Mariottes Gesetz, was beides leicht anstelle des allgemeinen Zeichens f hinzuschreiben wäre, allerdings mit beschränkten Gültigkeiten (Abhängigkeit der Kompressibilität vom Druck, siehe 314; Grenzen von Boyles und Mariottes Gesetz, siehe 359)[1].

4. Die 5 Gleichungen, nämlich die drei — nach 2 vervollständigten — Gleichungen a und die Gleichungen b und c sind es, die zur Festlegung der schon genannten 5 Unbekannten x, y, z, D, p (welche auch u, v, w mit einschließen) als Funktionen der Zeit genügen, sobald die zum besonderen zu berechnenden Fall gehörigen Anfangs- und Grenz-Bedingungen gegeben sind (Werte der 5 Größen zu einer gegebenen Anfangszeit, etwaige Umgrenzungen der Flüssigkeit mit dort etwa festliegenden Geschwindigkeiten und dergleichen). Alles was zur Erledigung eines gegebenen Falles von Flüssigkeitsbewegung noch zu tun ist, ist rein mathematische Arbeit an diesen Gleichungen, ohne daß irgendein Gedanke über die Natur der Dinge hinzukäme. Jene 5 Gleichungen enthalten in der Tat die Verläufe aller, so sehr vielartigen, innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der Gleichungen[2]) möglichen Bewegungen von und in Flüssigkeiten und Gasen fertig vorgezeichnet, und es ist kein Zeichen dafür vorhanden, daß innerhalb dieser Gültigkeitsgrenzen irgend etwas über die Gleichungen Hinausgehendes vorkäme. Daß die vorhandene Leistungsfähigkeit der Mathematik zu allermeist nicht ausreicht, um diesen reichen Inhalt in gegebenen Einzelfällen verwertbar zu machen, ist eine Sache für sich; Naturerkenntnis ist dadurch nicht eingeschränkt.

Es sei zur mathematischen Behandlung der Gleichungen nur bemerkt, daß oft Umformungen dienlich sind, so die Ersetzung von d^2x/dt^2 durch du/dt und weiter die Auflösung dieser totalen Differentialquotienten in ihre partiellen Bestandteile. Hierbei kommt das für Flüssigkeiten und Gase auftretende Bedürfnis zur Geltung, nicht die Wege und Zustände der einzelnen Flüssigkeitselemente zu untersuchen (die zwischen den anderen im allgemeinen gar nicht erkennbar sind), sondern die Bewegungszustände der einzelnen Raumelemente, die von beliebigen Flüssigkeitsteilen durchströmt sein können. Außerdem wird Manches durch Verzicht auf volle Genauigkeit erreicht. Oft wird Gleichung c, die soviel Einzelnes in sich enthält, sehr einfach in die Form D = Konst. gesetzt, d. h. man nimmt die Flüssigkeit (manchmal sogar das Gas) als inkompressibel an, wodurch auch Gl. b viel einfacher wird. Eine andere Beschränkung, welche der mathe-

[1]) Eine besondere Schwierigkeit liegt darin, daß die genannten gesetzmäßigen Zusammenhänge nur bei ungeändert bleibender Temperatur gelten und daß bei Dichtenänderungen, besonders in Gasen, leicht starke Temperaturänderungen eintreten (W 61). Man müßte alsdann für Gl. c wissen, wie schnell diese Temperaturänderungen wieder verschwinden, um sie berücksichtigen zu können, was aber in verschiedenen Fällen sehr verschieden ist. Bei sehr langsamen Bewegungen kann man guten Temperaturausgleich annehmen, also mit den angegebenen Gesetzmäßigkeiten ohne weiteres rechnen; bei sehr schnellen Bewegungen (z. B. der Schallbewegung in Luft) ist anzunehmen, daß gar kein Temperaturausgleich stattfindet, was dann Gl. c wieder einfach macht, wie es in der Wärmelehre gezeigt wird (s. Anhang W II).

[2]) Die allgemeinen Gültigkeitsgrenzen aller Hydrodynamik und Aerodynamik sind unter 411 behandelt. Gl. c betreffend siehe 2.

matischen Behandlung günstig war, ist die Fortlassung der Reibungskräfte[1]). Mit Reibung sind nur wenige Fälle berechnet (vgl. 404 und 409) und die nicht ganz einfachen Fälle auch nur unter der von vornherein einschränkenden Bedingung sehr kleiner Geschwindigkeiten. Einfache Fälle können übrigens stets auch ganz ohne die Zurüstung der Gleichungen a, b und c berechnet werden, wenn man nur den Sinn dieser Gleichungen, bezw. die für den einfachen Fall in Betracht kommenden Teile ihres Sinns, zugrunde legt[2]), wofür 369 u. f., sowie Anhang IV und die Anhänge zur Akustik viele Beispiele zeigen. Schon Newton hat ohne die Gleichungen, aber im Besitze des Sinnes derselben — er erkannte auch Druckwirkung und innere Reibung schon richtig — nicht wenige Vorgänge von Flüssigkeits- und Gasbewegungen in der Hauptsache und grundlegend geklärt, so die Vorgänge in den Wasserwellen und Schallwellen mit Einschluß der Frage der Fortpflanzungsgeschwindigkeit; Strömungen und Wirbelfäden sind ihm bereits als charakteristische Hauptformen der Flüssigkeits- und Gasbewegungen erkennbar geworden. Die Grundgleichungen haben dann diese Bewegungsformen noch mehr im einzelnen zu charakterisieren erlaubt, wie wir es unter 389 u. f. und 396 u. f. vorbrachten. In vielen praktischen Sonderfragen — wie etwa der Frage nach der günstigsten Form von Schiffen oder Luftschiffen für geringsten Bewegungswiderstand — haben die Antworten nicht aus den Gleichungen geholt werden können, sondern es haben die in sie verdichteten Kenntnisse einzeln in Verbindung mit Sonderbeobachtungen zur Verwendung kommen müssen.

5. Eine große Haupterkenntnis haben die zusammenfassenden Gleichungen der Hydrodynamik gefördert: Daß der Äther, der als Träger der elektrischen und magnetischen Kräfte große Ähnlichkeit im Verhalten mit Flüssigkeiten und Gasen zeigt, doch etwas anderes ist als diese materiellen Körper, selbst wenn man denselben quantitativ beliebig extrem gesteigerte Eigenschaften zuschreiben wollte. Zwar sind die Formen und das Verhalten von magnetischen und elektrischen Kraftlinien sehr ähnlich den Formen und dem Verhalten von Strömungslinien und Wirbellinien in Flüssigkeiten und Gasen (wenn diese reibungslos wären); aber die Gleichungen, welche die Eigenschaften der Kraftlinien zusammenfassen (Maxwells Gleichungen, Anhang E V a) stimmen — wie alle Umformungsversuche gezeigt haben — doch nicht überein mit den hydrodynamischen Gleichungen, aus welchen die Eigenschaften der Strömungslinien und Wirbelfäden reibungsloser Flüssigkeiten und Gase eingehend untersuchbar wurden; nur Ähnlichkeiten sind vorhanden (vgl. z. B. 394). Alle Versuche, den Äther aus der Kenntnis von Materie in irgendeinem ihrer Aggregatzustände (vgl. 6) verstehen zu wollen, müssen daher wohl als verfehlt aufgegeben werden, und dies ist schon ein großer Erkenntnis-Fortschritt, der auch bereits eine unbefangenere Betrachtung des Äthers und der Vorgänge in ihm eingeleitet hat (vgl. O 4, E 129, 579 u. f.).

6. Auch die Gleichungen für feste elastische Körper — Gleichungen der Elastizitätstheorie (272) — haben zu den Gleichungen der elektrischen und magnetischen Kraftlinien (Maxwells Gleichungen) nahe Beziehungen, jedoch wieder ohne vollkommene Übereinstimmung. Diese Gleichungen fester Körper sind übrigens dem Sinne nach nicht wesentlich verschieden von den hydrodynamischen Grundgleichungen, nur sind sie etwas umfassender als letztere,

[1]) Es ist sonderbar, daß man Flüssigkeiten und Gase, welche solche, der Mathematik entgegenkommende Eigenschaften besäßen, „ideale“ genannt hat.

[2]) Man sieht dann auch unmittelbarer, welche Annahmen der Rechnung zugrunde gelegt waren, welches also dann auch die Bedingungen sind, unter denen das Ergebnis gültig erwartet werden kann.